கணிதம்

தரம் 10

பகுதி I

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்



சகல பாடநூல்களையும் இலத்திரனியல் ஊடாகப் பெற்றுக்கொள்வதற்கு **www.edupub.gov.lk** வலைத்தளத்தை நாடுங்கள்.

முதலாம் பதிப்பு	-	2014
இரண்டாம் பதிப்பு	-	2015
மூன்றாம் பதிப்பு	-	2016
நான்காம் பதிப்பு	-	2017
ஐந்தாம் பதிப்பு	-	2018
ஆறாம் பதிப்பு	-	2019
ஏழாம் பதிப்பு	-	2020

ISBN 978-955-25-0185-2

இந்நூல், கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
அரசாங்க அச்சகக் கூட்டுத்தாபனத்தில்
அச்சிடப்பட்டு, வெளியிடப்பட்டது.

Published by: Educational Publications Department
Printed by: State Printing Corporation

தேசிய கீதம்

சிறீ லங்கா தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நல்லெழில் பொலி சீரணி
நலங்கள் யாவும் நிறை வான்மணி லங்கா
ஞாலம் புகழ் வள வயல் நதி மலை மலர்
நறுஞ்சோலை கொள் லங்கா
நமதுறு புகலிடம் என ஒளிர்வாய்
நமதுதி ஏல் தாயே
நம தலை நினதடி மேல் வைத்தோமே
நமதுயிரே தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதாரருள் ஆனாய்
நவை தவிர் உணர்வானாய்
நமதேர் வலியானாய்
நவில் சுதந்திரம் ஆனாய்
நமதிளமையை நாட்டே
நகு மடி தனையோட்டே
அமைவுறும் அறிவுடனே
அடல் செறி துணிவருளே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதார் ஒளி வளமே
நறிய மலர் என நிலவும் தாயே
யாமெலாம் ஒரு கருணை அனைபயந்த
எழில்கொள் சேய்கள் எனவே
இயலுறு பிளவுகள் தமை அறவே
இழிவென நீக்கிடுவோம்
ஈழ சிரோமணி வாழ்வுறு பூமணி
நமோ நமோ தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

ஒரு தாய் மக்கள் நாமாவோம்
ஒன்றே நாம் வாழும் இல்லம்
நன்றே உடலில் ஓடும்
ஒன்றே நம் குருதி நிறம்

அதனால் சகோதரர் நாமாவோம்
ஒன்றாய் வாழும் வளரும் நாம்
நன்றாய் இவ் இல்லினிலே
நலமே வாழ்தல் வேண்டுமன்றோ

யாவரும் அன்பு கருணையுடன்
ஒற்றுமை சிறக்க வாழ்ந்திடுதல்
பொன்னும் மணியும் முத்துமல்ல - அதுவே
யான்று மழியாச் செல்வமன்றோ.

ஆனந்த சமரக்கோன்
கவிதையின் பெயர்ப்பு.

முன்னுரை

உலகம் நாளுக்கு நாள் விருத்தி அடைந்து செல்கின்றது. அதற்கேற்பக் கல்வித் துறையும் எப்போதும் புதுப்பொழிவு பெறுகின்றது. அதனால், எதிர்காலச் சவால்களுக்குச் சிறப்பாக முகங்கொடுக்க முடியுமான மாணவர் சமுதாயமொன்றை உருவாக்க வேண்டுமாயின், எமது கற்றல் கற்பித்தல் செயற்பாடுகளும் வினைத்திறன் மிக்கதாக அமைய வேண்டும். அதற்கு வலுவூட்டி நவீன உலக அறிவை வழங்கும் அதேவேளை உலகிற்கு நற்பண்புகள் நிறைந்த பிரசைகளை உருவாக்குவதற்கு உதவுவதும் எமது பொறுப்பாகும். தேசத்தின் பிள்ளைகளின் அறிவுத் தீபத்தை ஏற்றும் உன்னத நோக்கத்துடன் எமது திணைக்களம் கற்றல் சாதனங்களை உருவாக்கும் செயற்பாட்டில் செயலூக்கத்துடன் ஈடுபட்டு அதற்குப் பங்களிப்பு வழங்குகின்றது.

பாடநூல்கள் அறிவு நிறைந்த களஞ்சியங்களாகும். அவை சில வேளைகளில் எங்களை இரசனை உலகிற்கு அழைத்து செல்வதுடன் தர்க்கரீதியாகச் சிந்திக்கும் ஆற்றலையும் வளர்க்கின்றது. மறைந்துள்ள ஆற்றல்களை வெளிக்கொணர்கின்றது. எதிர்காலத்தில் எப்போதாவது, இந்தப் பாடநூல்கள் தொடர்பான சில ஞாபகங்களை மீட்கும்போது அவை உங்கள் மனதுக்கு இதமானதாக அமையும். இந்தப் பெறுமதி வாய்ந்த கற்றல் சாதனத்தின் மூலம் சிறந்த பயன்பெறும் அதேவேளை மேன்மேலும் சிறந்த அறிவு மூலங்களை நெருங்குவதும் உங்களுக்குப் பயனுள்ளதாக அமையும். இலவசக் கல்வியின் பெறுமதிமிக்க ஒரு பரிசாக இப்பாடநூல் உங்களுக்கு இலவசமாக வழங்கப்படுகின்றது. பாடநூல்களுக்காக அரசாங்கம் செலவிட்டுள்ள பெருந் தொகைப் பணத்திற்கு, உங்களால் மாத்திரமே பெறுமதி சேர்க்க முடியும். இப்பாடநூலை சிறப்பாகப் பயன்படுத்தி சிறந்த அறிவும் பண்பாடும் கொண்ட பிரசைகளாகி நாளைய உலகிற்கு ஒளியூட்டுவதற்கு உங்கள் அனைவருக்கும் ஆற்றலும் தைரியமும் கிடைக்க வேண்டுமென்று வாழ்த்துகின்றேன்.

இப்பாடநூலை உருவாக்குவதில் அளப்பரிய பங்களிப்பு வழங்கிய எழுத்தாளர் மற்றும் பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அங்கத்தவர்களுக்கும் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தின் உத்தியோகத்தர்கள் அனைவருக்கும் எனது மனமார்ந்த நன்றிகளைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

பீ. என். அயிலப்பெரும
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்
இசுருபாய
பத்தரமுல்ல
2020. 06. 26

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

பீ. என். அயிலப்பெரும - கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

வழிகாட்டல்

டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி - ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி)
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

இணைப்பாக்கம்

அ. குலரத்தினம் - பிரதி ஆணையாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

எழுத்தாளர் குழு

என். வாகீசமூர்த்தி - பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை)

ஆர். எஸ். ஈ. புஸ்பராஜன் - உதவிப் பணிப்பாளர்
வலையக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.

கே. கருணேஸ்வரன் - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, கொழும்பு.

ஹேமமாலினி வீரக்கொடி - விரிவுரையாளர்
பஸ்துன்ரட்ட தேசியக் கல்வியற் கல்லூரி.

எச். எம். ஜயசேன. - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, அம்பலாங்கொட

வி. வி. ஆர். விதாரம - ஆசிரிய ஆலோசர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, தெகியோவிட்ட.

அஜித் ரணசிங்க - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, ஹோமாகம.

வீ. எம். பி. லால் ஜெயகாந்த - ஆசிரிய ஆலோசகர்
சாந்த தோமஸ் கல்லூரி கல்கிஸ்சை.

அனுர வீரசிங்க - ஆசிரிய ஆலோசகர் (பிரிவேனா)

எச். ஏ. பீதர்மரத்ன - ஆசிரிய சேவை
ஸ்ரீமாவோ பண்டாரனாயக்க வித்தியாலயம், கொழும்பு 7

ஜி. எச். எஸ். ரஞ்சனி டி சில்வா - ஆசிரிய சேவை
தர்மபால வித்தியாலம், பன்னிபிட்டிய.

பதிப்பாசிரியர் குழு

கலாநிதி ரோமைன் ஜயவர்த்தன - சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்
கணிதத்துறை, கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.

கலாநிதி பீ. கே. மல்லவ ஆராச்சி	-	சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, களனிப் பல்கலைக்கழகம்.
டபிள்யூ. எச். பிரஞ்ஞாதர்ஷன	-	சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கல்விப் பீடம், கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.
சி. ராஜேந்திரம்	-	விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை தேசிய கல்வி நிறுவகம்
பீ. ஜெகத்குமார	-	சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
அ. குலரத்தினம்	-	பிரதி ஆணையாளர். கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

மொழி பதிப்பாசிரியர்

எஸ். காண்டீபன்	-	விரிவுரையாளர் கல்வியற் கல்லூரி, வவுனியா.

கணினி வடிவமைப்பு

முத்தையா காந்தரூபன்	-	கணினி வடிவமைப்பாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

உள்ளடக்கம்

எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அறிவுறுத்தல்

2015 ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைக்கு வரும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப இப்பாடநூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. பாடநூல் மாணர்களுக்காகவே தயாரிக்கப்படுகின்றது. எனவே நீங்கள் தனித்து வாசித்தேனும் விளங்கிக்கொள்ளத்தக்க வகையில் எளிமையாகவும் விபரமாகவும் அதனைத் தயாரிக்க முயற்சித்தோம்.

பாட எண்ணக்கருக்களைக் கவர்ச்சியான வகையில் முன்வைப்பதற்காகவும் உறுதிபடுத்துவதற்காகவும் விபரித்தல், செயற்பாடு மற்றும் உதாரணங்கள் போன்று வெவ்வேறு முறைகளைப் பின்பற்றினோம். பயிற்சிகளைச் செய்வதன் விருப்பு விருத்தியடையும் வகையில் எளிமையிலிருந்து கடினம் வரை முறையாக ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணிதப் பாடத்துக்குரிய எண்ணக்கருக்களைக் குறிக்கும் சொற்களை அரச கரும மொழித் திணைக்களம் தயாரித்துள்ள கணிதப் பாடக் கலைச் சொல் அகராதிக்கேற்பப் பயன்படுத்தினோம்.

பாடத்திட்டத்தில் தரம் 10 இற்குரிய பாடப்பகுதிகளைக் கற்பதற்கு, முன்னைய தரங்களில் நீங்கள் கற்ற சிற்சில விடயங்கள் தேவைப்படும். எனவே அம்முன்னறிவை ஞாபகப்படுத்துவதற்காக மீட்டற் பயிற்சிகள் தேவையான அத்தியாத்தின் தொடக்கத் திலும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின்மூலம் தரம் 10 இற்குரிய பாடவிடயங்களுக்காக நீங்கள் தயார்படுத்தப்படுவீர்கள்.

வகுப்பில் ஆசிரியர் கற்பிப்பதற்கு முன்னர் நீங்கள் இவ்வத்தியாயங்களை வாசிப்பதன் மூலமும் ஒவ்வோர் அத்தியாத்தில் வரும் மீட்டற் பயிற்சிகளை செய்வதன் மூலமும் இப்பாடநூலைப் பயன்படுத்தி உச்ச பயன்களைப் பெறலாம்.

கணிதக் கல்வியானது மகிழ்ச்சிகரமானதாகவும் பயனுடையதாகவும் அமைய நாங்கள் ஆசிக்கின்றோம்.

நூலாக்கக் குழுவினர்.

1

சுற்றளவு

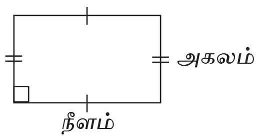
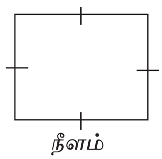
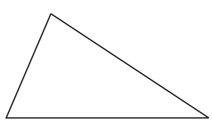
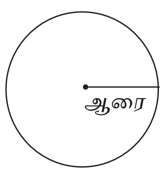
இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,

- ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவைக் காண்பதற்கும்
- ஆரைச்சிறையுடன்கூடிய கூட்டுத் தள உருவங்களின் சுற்றளவுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

தள உருவங்களின் சுற்றளவு

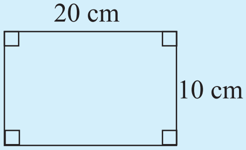
தள உருவங்களின் சுற்றளவைக் காணுதல் பற்றி முன்னைய தரங்களில் கற்றுள்ளீர்கள். அதனைப் பின்வருமாறு பொழிப்பாக்கிக் காட்டலாம்.

தள உருவம்		சுற்றளவு
செவ்வகம்		2 (நீளம் + அகலம்)
சதுரம்		ஒரு பக்கத்தின் நீளம் × 4
முக்கோணி		மூன்று பக்கங்களினதும் கூட்டுத்தொகை
வட்டம்		2π × ஆரை

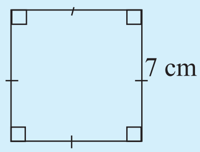
மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் தள உருவங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் சுற்றளவைக் காண்க.

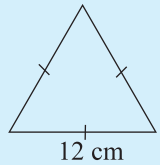
(i)



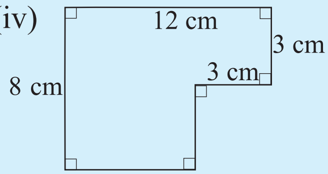
(ii)



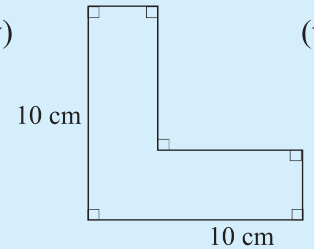
(iii)



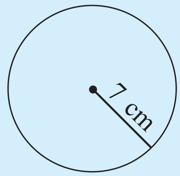
(iv)



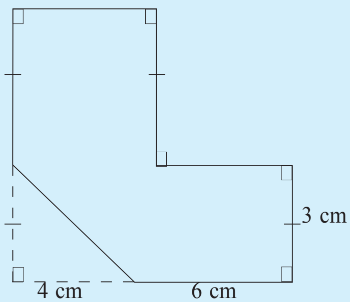
(v)



(vi)

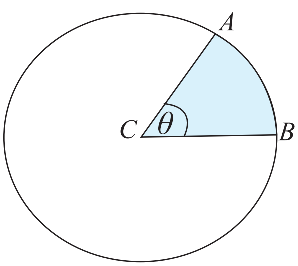


2. பின்வரும் உருவத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.



அடிப்படைத் தள உருவங்களின் சுற்றளவைப் போன்று கூட்டுத் தள உருவங்களின் சுற்றளவைக் காணுதல் பற்றிய விடயங்களை நீங்கள் மேற்குறித்த மீட்டற் பயிற்சியின் மூலம் நினைவுகூரலாம். இப்போது ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

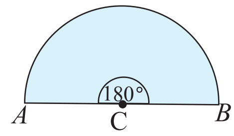
1.1 ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவைக் காணல்



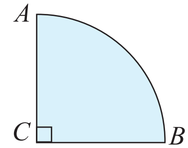
மேற்குறித்த உருவில் ஒரு வட்டத்தின் இரு ஆரைகளினாலும் பரிதியின் ஒரு பகுதியினாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட ஒரு பிரதேசம் நிழற்றப்பட்டுள்ளது. அத்தகைய ஒரு பிரதேசம் ஆரைச்சிறை எனப்படும். இரு ஆரைகளுக்குமிடையே உள்ள கோணம் θ $(A\hat{C}B)$ ஆனது மையக் கோணம் எனப்படும். நிழற்றப்படாத பகுதியினால் மையக் கோணம் $360^\circ - \theta$ ஆகவுள்ள ஆரைச்சிறை காட்டப்பட்டுள்ளது.

இம்மையக் கோணம் 0° தொடக்கம் 360° வரையுள்ள எந்தப் பெறுமானத்தையும் கொண்டிருக்கலாம்.

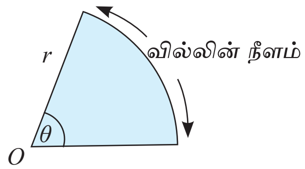
- மையக் கோணம் 180° ஆக இருக்கும்போது கிடைக்கும் ஆரைச்சிறை ஓர் அரை வட்டமாகும்.



- மையக் கோணம் 90° ஆக இருக்கும்போது கிடைக்கும் ஆரைச்சிறை ஒரு கால் வட்டமாகும்.



ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளத்தைக் காணல்

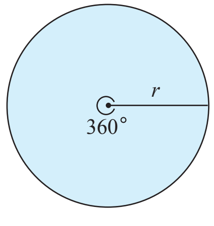


உருவில் r ஆரையுடைய ஓர் ஆரைச் சிறை காட்டப்பட்டுள்ளது. ஆரை r ஐயும் ஒரு வட்டத்தின் மையக் கோணம் θ ஐயும் உடைய ஓர் ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளத்தைக் காணும் விதம் பற்றி இப்போது பார்ப்போம். இதற்காக முதலில் மேற்குறித்த உருவில் காணப்படும் அரைவட்ட வில்லின் நீளத்தைக் காண்போம்.

ஆரை r ஐ உடைய ஒரு வட்டத்தின் பரிதி $2\pi r$ என்பதை நாம் அறிவோம். ஆகவே சமச்சீருக்கேற்ப, ஆரை r ஐ உடைய ஓர் அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளம் $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$ ஆகும்.

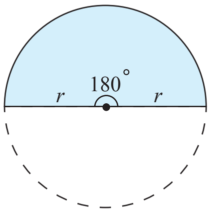
இங்கு $2\pi r$ இன் பெறுமானத்தை 2 இனால் வகுத்து πr என அரை வட்டத்தின் வில்லின் நீளத்தைக் காண்பதற்குச் சமச்சீரே காரணமாகும். பின்வருமாறு காரணங்களைக் காட்டுவதன் மூலமும் அந்த πr பெறுமானத்தைப் பெறலாம்.

ஆரை r ஐ உடைய ஒரு வட்டத்தையும் ஓர் அரைவட்டத்தையும் கருதுவோம்.



வட்டத்தின் மையத்தைச் சுற்றி உள்ள கோணம் 360° ஆகும். அக் கோணத்தை ஒத்த வட்ட வில்லின் நீளம் பரிதியாகிய $2\pi r$ ஆகும்.

இப்போது ஓர் அரைவட்டத்தைக் கருதுவோம்.



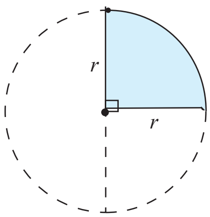
அரை வட்டத்தின் மையக் கோணம் 180° ஆகும். அது 360°இன் $\frac{1}{2}$ ஆகும். எனவே, அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளம் வட்டத்தின் வில்லின் நீளத்தின் $\frac{1}{2}$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது, அது $2\pi r \times \frac{1}{2} = \pi r$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

மேலும் விவரமாக எழுதும்போது

அரைவட்ட வில்லின் நீளம் $2\pi r \times \frac{180}{360} = 2\pi r \times \frac{1}{2}$

$$= \pi r$$

இவ்வாறு ஒரு கால் வட்ட ஆரைச்சிறையின் மையக் கோணம் 90° ஆகையால்,



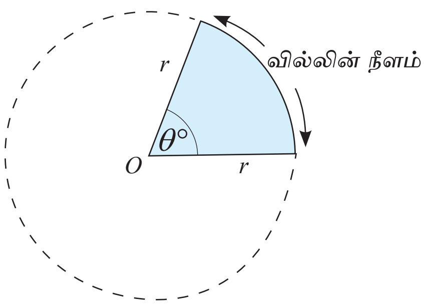
கால் வட்டம் ஆகவுள்ள ஓர்

ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளம் $= 2\pi r \times \frac{90}{360}$

$$= 2\pi r \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi r}{2}$$

இதேபோல காட்டி ஆரை r ஐ உடைய ஒரு வட்டத்தின் மையக் கோணம் θ ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளத்திற்கான ஒரு கோவையை எளிதாகப் பெறலாம்.

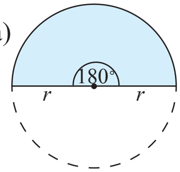
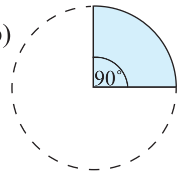
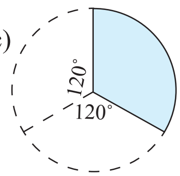
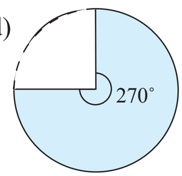
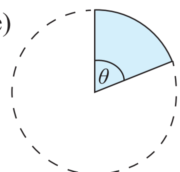


வட்டத்தின் பரிதி $= 2\pi r$

வில்லின் நீளம் $=$ வட்டத்தின் பரிதியின் $\frac{\theta}{360}$

$\therefore$ வில்லின் நீளம் $= 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$

ஓர் ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளத்தைக் காண்பது தொடர்பான கருத்தை மேலும் உறுதிப்படுத்துவதற்காகப் பின்வரும் அட்டவணையை ஆராய்வோம்.

ஆரைச்சிறை	வில்லின் நீளம் பரிதியின் பின்னம் (உருவிலிருந்து)	மையக் கோணம்	முழுக் கோணத்தின் பின்னம்
(a) 	$\frac{1}{2}$	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$
(b) 	$\frac{1}{4}$	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$
(c) 	$\frac{1}{3}$	120°	$\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$
(d) 	$\frac{3}{4}$	270°	$\frac{270}{360} = \frac{3}{4}$
(e) 	$\frac{\theta}{360}$	θ	$\frac{\theta}{360}$

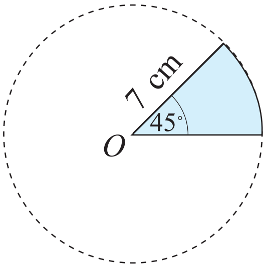
அட்டவணையில் 1 ஆம் 2 ஆம் நிரல்களைப் பார்க்க.

யாதாயினுமொரு வில்லின் நீளம் வட்டத்தின் பரிதியின் என்ன பின்னம் என்பதை உருவிலிருந்து இனங்காணத்தக்கதாக இருக்கும்போது அவ்வில்லின் நீளத்தை எளிதாகக் காணலாம்.

இப்பின்னம், $\frac{\text{மையக் கோணம்}}{360}$ என்பது 4 ஆம் நிரலிலிருந்து தெளிவாகின்றது.

இதற்கேற்ப, மையக் கோணம் θ ஐயும் ஆரை r ஐயும் உடைய ஓர் ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளம் $2\pi r \times \frac{\theta}{360}$ இன் மூலம் பெறப்படும் என்பதை நீங்கள் விளங்கிக் கொண்டிருப்பீர்கள். (இவ்வலகில் π இன் பெறுமானங்களை $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க).

உதாரணம் 1



(i) உருவில் காணப்படும் ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளம் வட்டத்தின் பரிதியின் என்ன பின்னமாகும்?

(ii) அதன் வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

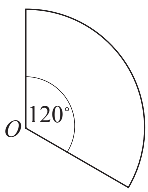
(i) $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$

(ii) வில்லின் நீளம் $= 2\pi r \times \frac{1}{8}$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times \frac{1}{8}$

$= 5.5 \text{ cm}$

உதாரணம் 2



உருவில் காணப்படும் ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளம் 44 cm ஆகும். அந்த ஆரைச்சிறையின் (வட்டத்தின்) ஆரையைக் காண்க.

வட்டத்தின் ஆரை r cm எனக் கொள்வோம்.

வில்லின் நீளம் $= 2\pi r \times \frac{120}{360}$

$\therefore \quad 44 = 2\pi r \times \frac{120}{360}$

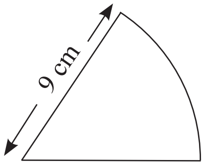
$44 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times \frac{120}{360}$

$\therefore \quad r = \frac{44 \times 3 \times 7}{2 \times 22}$

$r = 21 \text{ cm}$

$\therefore$ வட்டத்தின் ஆரை $= 21$ cm

உதாரணம் 3



உருவில் உள்ள ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளம் 11 cm ஆகும். இந்த ஆரைச்சிறையின் மையக் கோணத்தைக் காண்க.

மையக் கோணத்தை θ எனக் கொள்வோம்.
அப்போது,

வில்லின் நீளம் $= 2\pi r \times \dfrac{\theta}{360}$

$$\therefore 11 = 2 \times \frac{22}{7} \times 9 \times \frac{\theta}{360}$$

$$\theta = \frac{11 \times 360 \times 7}{2 \times 22 \times 9}$$

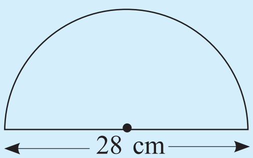
$$\theta = 70$$

$\therefore$ மையக் கோணத்தின் பெறுமதி 70° ஆகும்.

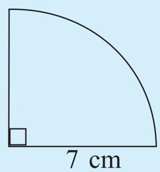
பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் ஆரைச்சிறைகள் ஒவ்வொன்றினதும் வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

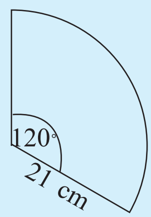
(i)



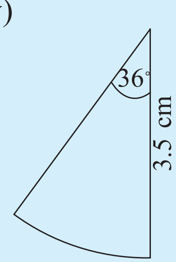
(ii)



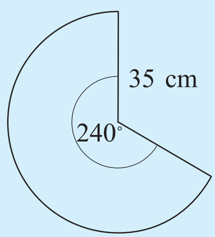
(iii)



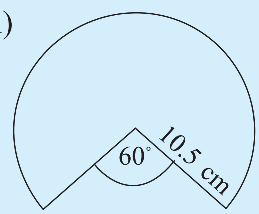
(iv)



(v)



(vi)

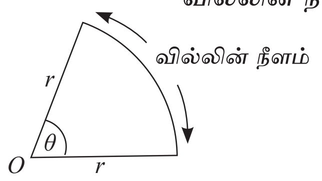


ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவைக் காணல்

ஓர் ஆரைச்சிறையின் நீளத்தைக் கண்டபின் ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவைக் காண்பது இலகுவானது. ஓர் ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவைப் பெறுவதற்கு அதனை உள்ளடக்கும் இரு ஆரைகளின் நீளங்களையும் விற் பகுதியின் நீளத்தையும் கூட்ட வேண்டும்.

அதாவது, ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவு = வில்லின் நீளம் + ஆரை + ஆரை

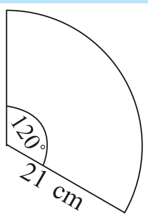
= வில்லின் நீளம் + 2 × ஆரை



அதாவது ஆரை r ஆகவும் மையக் கோணம் θ ஆகவும் இருக்கும்,

ஓர் ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவு $= \mathbf{2\pi r \times \dfrac{\theta}{360} + 2r}$

உதாரணம் 1



உருவில் மையக் கோணம் 120° ஐயும் ஆரை 21 cm ஐயும் உடைய ஓர் ஆரைச்சிறை உள்ளது. அதன் சுற்றளவைக் காண்க.

வில்லின் நீளம் $= 2\pi r \times \dfrac{120}{360}$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 21 \times \dfrac{120}{360}$

$= 44$ cm

∴ ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவு $= 44 + 2 \times 21$

$= 86$ cm

உதாரணம் 2

ஒரு வட்டத்தின் $\dfrac{2}{3}$ ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவு 260 cm ஆகும். அதன் ஆரையைக் காண்க.

வட்டத்தின் ஆரை r cm எனக் கொள்வோம்.

வில்லின் நீளம் $= 2\pi r \times \dfrac{2}{3}$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times r \times \dfrac{2}{3}$

$= \dfrac{88r}{21}$

ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவு $= \frac{88r}{21} + 2r$

$$\therefore \frac{88r}{21} + 2r = 260$$

$$\therefore 88r + 42r = 260 \times 21$$

$$\therefore 130r = 260 \times 21$$

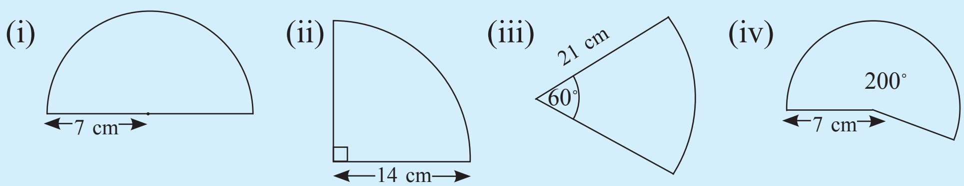
$$r = \frac{\overset{2}{\cancel{260}} \times 21}{\underset{1}{\cancel{130}}}$$

$$= 42 \text{ cm}$$

$\therefore$ ஆரைச்சிறையின் ஆரை 42 cm ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. கீழே காட்டப்பட்டுள்ள ஆரைச்சிறைகளின் சுற்றளவைக் காண்க.



2. ஓர் ஆரைச்சிறையின்,

(i) மையக் கோணம் 180° ஆகவும் சுற்றளவு 180 cm ஆகவும் இருக்கும்போது

(ii) மையக் கோணம் 120° ஆகவும் சுற்றளவு 43 cm ஆகவும் இருக்கும்போது அதன் ஆரையைக் காண்க.

3. ஓர் ஆரைச்சிறையின்,

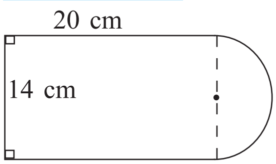
(i) சுற்றளவு 64 cm ஆகவும் ஆரை 21 cm ஆகவும் இருக்கும்போது

(ii) சுற்றளவு 53 cm ஆகவும் ஆரை 21 cm ஆகவும் இருக்கும்போது அதன் மையக் கோணத்தைக் காண்க.

1.2 ஆரைச்சிறைகளைக் கொண்ட தள உருவங்களின் சுற்றளவு

ஆரைச்சிறைகளைக் கொண்ட **கூட்டுத் தள** உருவங்களின் சுற்றளவைக் காணும் முறையைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் 20 cm நீளமும் 14 cm அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்துடன் அகலப் பக்கத்தை விட்டமாகக் கொண்ட ஓர் அரைவட்டம் இணைக்கப்பட்டுள்ள விதம் காணப்படுகின்றது. அவ்வுருவின் சுற்றளவைக் காண்க.

ஆரை r ஐ உடைய அரைவட்ட வில்லின் நீளம் $= \frac{1}{2} \times 2\pi r$ ஆகையால்,

ஆரை 7 cm ஐ உடைய வில்லின் நீளம் $= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

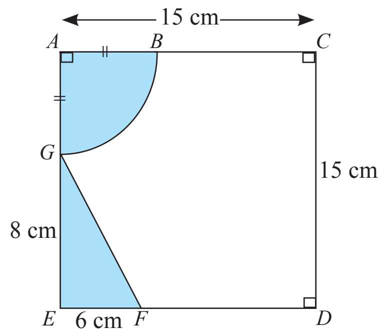
$= 22$ cm

$\therefore$ உருவின் சுற்றளவு $= 20 + 20 + 14 + 22$

$= 76$ cm

உதாரணம் 2

உருவில் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 15 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரத் தகடு காணப்படுகின்றது. அதில் நிழற்றப்பட்டுள்ள AGB ஆரைச்சிறையையும் GEF முக்கோணியையும் வெட்டி அகற்றுவதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றை வெட்டி அகற்றிய பின்னர் எஞ்சியிருக்கும் $BCDFG$ தகட்டின் சுற்றளவைக் காண்க.



$BCDFG$ இன் சுற்றளவு $= BC + CD + DF + FG +$ வில் GB

முதலில் FG இன் பெறுமானத்தைக் கணிப்போம்.

இதற்கு, செங்கோண முக்கோணி GEF இல் பைதகரசின் தேற்றப்படி

$$FG^2 = 8^2 + 6^2$$
$$= 64 + 36$$
$$= 100$$
$$\therefore FG = \sqrt{100}$$
$$= 10 \text{ cm}$$

அடுத்து வில் GB இன் நீளத்தைக் காண்போம். கோணம் BAG யின் பெறுமானம் 90° ஆகையால்

$$\text{வில் } GB = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

வில் $GB = 11\text{cm}$

இறுதியாக BC, DF ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் காண்போம்

$$BC = 15 - 7$$
$$= 8 \text{ cm}$$
$$DF = 15 - 6$$
$$= 9 \text{ cm}$$

அதாவது $BCDFG$ இன் சுற்றளவு $= BC + CD + DF + FG +$ வில் GB

$= 8 + 15 + 9 + 10 + 11$

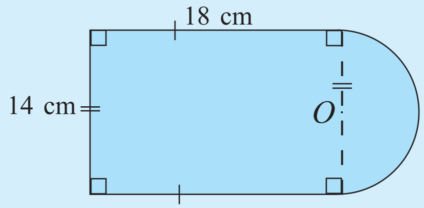
$= 53$ cm

$\therefore$ எஞ்சியிருக்கும் தகட்டின் சுற்றளவு 53 cm ஆகும்.

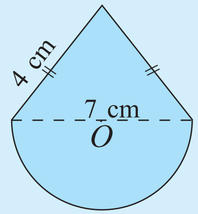
பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் தள உருவங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் சுற்றளவைக் காண்க.

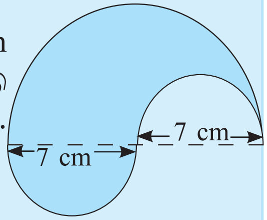
(i)



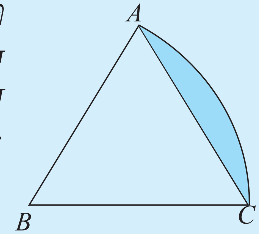
(ii)



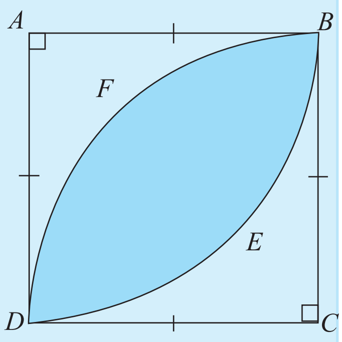
2. 7 cm ஆரையுள்ள ஓர் அரை வட்டத்தையும் 7 cm விட்டமுள்ள ஓர் அரை வட்டத்தையும் கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட ஓர் உருவம் இங்கு காணப்படுகின்றது. நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் சுற்றளவைக் காண்க.



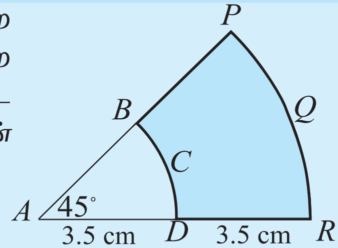
3. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 7 cm ஆகவுள்ள சமபக்க முக்கோணி ABC அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்திற்குச் சமமான ஆரையைக் கொண்ட ஓர் ஆரைச்சிறையினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ள விதம் உருவில் காணப்படுகின்றது. நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் சுற்றளவைக் காண்க.



4. உருவில் $ABED$, $CDFB$ ஆகிய இரண்டு ஆரைச் சிறைகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. $AB = 10.5$ cm ஆயின், தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைப் பயன்படுத்தி நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் சுற்றளவைக் காண்க.



5. A யை மையமாகவும் AD, AR என்பவற்றை ஆரையாகவும் கொண்ட இரண்டு ஆரைச்சிறைகள் உருவில் காணப்படுகின்றன. நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் சுற்றளவிலும் ஆரைச்சிறை $APQR$ இன் சுற்றளவு எவ்வளவினால் கூடியது?

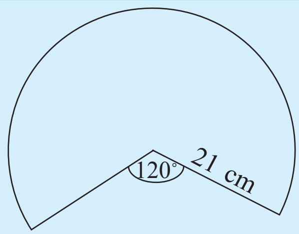


பொழிப்பு

- மையக் கோணம் θ ஆகவும் ஆரை r ஆகவும் உள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் வில்லின் நீளம் $2\pi r \times \frac{\theta}{360}$ இனால் தரப்படுகின்றது.
- ஓர் ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவு $2\pi r \times \frac{\theta}{360} + 2r$ இனால் தரப்படுகின்றது.

பலவினப் பயிற்சி

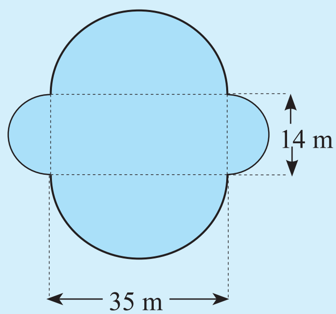
1. 21 cm ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டிலிருந்து 120° ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறை வெட்டி அகற்றப் பட்டுள்ளது. தகட்டின் மீதிப் பகுதியின் சுற்றளவு 130 cm எனக் காட்டுக.



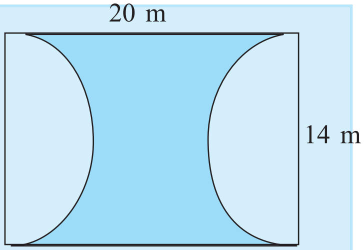
2. நான்கு அரைவட்ட எல்லைகளைக் கொண்ட ஒரு தடாகம் உருவில் காணப்படுகின்றது. தடாகத்தைச் சுற்றி எல்லைகள் வழியே ஒரு பாதுகாப்பு வேலி அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) தடாகத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

(ii) தடாகத்தைச் சுற்றி வேலி போடுவதற்கு 1 m இற்கு ரூ. 5 000 செலவாகும் எனின், தடாகத்தைச் சுற்றி வேலியிடுவதற்கு எவ்வளவு செலவாகும்.



3. இரு அந்தங்களிலும் இரு அரைவட்டப் பூப் பாத்திகள் உள்ள ஒரு செவ்வகக் காணி உள்ளது. நிழற்றப்பட்ட பகுதியில் புற்கள் வளர்க்கப்பட்டுள்ளன.

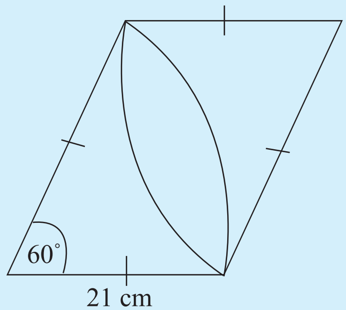


(i) புற்கள் வளர்க்கப்பட்ட பகுதியின் சுற்றளவைக் காண்க.

புற்கள் வளர்க்கப்பட்ட பகுதியைச் சுற்றி 25 cm நீளமுள்ள செங்கற்கள் பதிக்கத் தீர்மானிக்கப்பட்டது.

(ii) தேவையான கற்களின் அதிகுறைந்த எண்ணிகையைக் காண்க.

4. ஒரு யன்னலில் பொருத்தத் தயார்செய்யப்பட்ட அளியடைப்பின் (gril) ஒரு பகுதி உருவில் காணப்படுகின்றது. ஆரைச்சிறை வடிவத்தில் அமைக்கப்பட்ட இரு கம்பிப் பகுதிகளை உருவில் உள்ளவாறு உருக்கி இணைப்பதன் மூலம் அது செய்யப்பட்டுள்ளது. அதில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப அதனைத் தயார்செய்ய 13 cm நீளமுள்ள 10 கம்பித் துண்டுகள் தேவையென அதனை அமைத்தவர் கூறுகின்றார். அவருடைய கூற்று உண்மையானது என்பதைக் காரணங்களுடன் காட்டுக.



2 வர்க்கமூலம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- நிறைவர்க்கம் அல்லாத ஓர் எண்ணின் வர்க்கமூலத்தை அண்ணளவாக்கம் மூலம் காணவும்
- யாதாயினும் ஓர் எண்ணின் வர்க்கமூலத்திற்கான ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தை வகுத்தல் முறையின் மூலம் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

2.1 ஓர் எண்ணின் வர்க்கமூலத்தை அண்ணளவாக்கம் மூலம் காணல்

நீங்கள் எண் ஒன்றின் வர்க்கம் , நிறைவர்க்க எண்களின் வர்க்கமூலம் என்பன பற்றி முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள்.

3×3 என்பதன் பெறுமானம் 9 ஆகும். 3×3 ஐச் சுருக்கமாக 3^2 எனக் குறிப்போம். இது "மூன்றின் வர்க்கம்" என வாசிக்கப்படும். 3^2 என்பதில் "2" குறிப்பது "இரண்டு" மூன்றுகள் பெருக்கப்படுகின்றது என்பதையாகும். மூன்றின் வர்க்கம் ஒன்பது ஆகும். இது $3^2 = 9$ என எழுதப்படும்.

சில எண்களின் வர்க்கங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

எண்	எண்ணின் வர்க்கத்தை எவ்வாறு பெறல்	எண்ணின் வர்க்கத்தை எவ்வாறு எழுதுதல்	எண்ணின் வர்க்கம்
1	1×1	1^2	1
2	2×2	2^2	4
3	3×3	3^2	9
4	4×4	4^2	16
5	5×5	5^2	25

1, 4, 9, 16 ... போன்ற எண்கள் நிறைவர்க்கங்கள் எனப்படும்.

வர்க்கமூலம் காணல் என்பது வர்க்கம் என்பதன் நேர்மாறாகும். உதாரணமாக $3^2 = 9$ என்பதில் 9 இன் வர்க்கமூலம் 3 என நாம் கூறுவோம். அட்டவணையில் முதலாவது மற்றும் இறுதி நிரல்களிலிருந்து இது உங்களுக்குத் தெளிவாகும்.

1 இன் வர்க்கமூலம் 1

4 இன் வர்க்கமூலம் 2

9 இன் வர்க்கமூலம் 3

16 இன் வர்க்கமூலம் 4

25 இன் வர்க்கமூலம் 5

வர்க்கமூலம் என்பது "$\sqrt{\ }$" என்ற குறியீட்டினால் குறிக்கப்படும்.

ஆகவே நாம் $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து ஒவ்வொரு எண்ணிற்கும் வர்க்கம் காணப்படும் என்பது தெளிவாகும். அவ்வாறு ஒவ்வொரு நேர் எண்ணிற்கும் ஒரு வர்க்கமூலம் காணப்படுமா? தற்போது இதை நாம் ஆராய்வோம்.

மேலே அட்டவணையின்படி 4 இன் வர்க்கமூலம் 2 உம் 9 இன் வர்க்கமூலம் 3 உம் ஆகும். 4 இற்கும் 9 இற்கும் இடையில் உள்ள ஓர் எண்ணின் வர்க்கமூலப் பெறுமானம் 2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையில் காணப்படும். ஆகவே 4 இற்கும் 9 இற்கும் இடையில் உள்ள ஓர் எண்ணின் வர்க்கமூலப் பெறுமானம் ஒரு முழுவெண் பெறுமானம் அல்ல என்பது தெளிவாகும். அது ஒரு தசம எண்ணாகும்.
தற்போது நாம் இவ்வாறாக எந்தவொரு நேர் எண்ணிற்கும் வர்க்கமூல அண்ணளவாக்கப் பெறுமானத்தைக் காணலாம். இந்தப் பெறுமானம் **அண்ணளவாக்கம்** எனப்படும்.

அண்ணளவாக்கல் முறைமூலம் 5 இன் வர்க்கமூலம் எவ்வாறு பெறப்படுகின்றது?

எண்	**எண்ணின் வர்க்கத்தை எவ்வாறு பெறல்**	**எண்ணின் வர்க்கத்தை எவ்வாறு எழுதுதல்**	**எண்ணின் வர்க்கம்**
2	2×2	2^2	4
2.1	2.1×2.1	2.1^2	4.41
2.2	2.2×2.2	2.2^2	4.84
2.3	2.3×2.3	2.3^2	5.29
2.4	2.4×2.4	2.4^2	5.76
2.5	2.5×2.5	2.5^2	6.25
2.6	2.6×2.6	2.6^2	6.76
2.7	2.7×2.7	2.7^2	7.29

அட்டவணையின் 4 ஆவது நிரலில் உள்ள பெறுமானங்களில் இரண்டு பெறுமானங்கள் 4.84 உம் 5.29 உம் 5 இற்குக் கிட்டிய பெறுமானங்கள் ஆகும்.

இவை முறையே 2.2 இனதும் 2.3 இனதும் வர்க்கங்களாகும்.

மேலேயுள்ள அட்டவணையின் மூலம் 4.84 இனதும் 5.29 இனதும் வர்க்கமூலங்கள் 2.2 உம் 2.3 உம் ஆகும்.

இதை குறியீட்டின் மூலம் $\sqrt{4.84} = 2.2$ உம் $\sqrt{5.29} = 2.3$ என எழுதலாம்.

இப்போது இவற்றில் 5 இற்கு மிகக் கிட்டிய பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு அவற்றிற்கும் 5 இற்கும் இடையேயான வித்தியாசத்தைக் காண்போம்.

$$5 - 4.84 = 0.16 \text{ உம்}$$

$$5.29 - 5 = 0.29 \text{ உம் ஆகும்.}$$

இவற்றில் குறைந்த வித்தியாசாத்தைத் தருவது 4.84 ஆகும். ஆகவே 5 இன் வர்க்கமூலத்தின் அண்ணளவாக்க பெறுமானம் 2.2 ஆகும்.

இவ்வாறு நேர் நிறைவெண் ஒன்றின் வர்க்கமூலமாகப் பெறப்பட்ட முதலாம் தசமதானப் பெறுமானம் "**வர்க்கமூலத்தின் முதலாம் தசமதான அண்ணளவாக்கம்** " எனப்படும்.

எனவே 5 இன் வர்க்கமூலத்திற்கான முதலாம் தசமதான அண்ணளவாக்கப் பெறுமானம் 2.2 ஆகும்.

அண்ணளவாக்கப் பெறுமானத்தைக் குறிக்க "≈" என்னும் குறியீடு பயன்படுத்தப்படும்.

ஆகவே $\sqrt{5} \approx 2.2$ என எழுதப்படும்.

இதே முறையில் காரணங்களை வழங்குவதன்மூலம் 6 இன் வர்க்கமூலத்திற்கான முதலாம் தசமதான அண்ணளவாக்கம் 2.4 எனவும் 7 இற்கு 2.6 எனவும் முடிவுக்கு வரலாம்.

அதாவது $\sqrt{6} \approx 2.4$

$\sqrt{7} \approx 2.6$

உதாரணம் 1

$\sqrt{17}$ ஐ அண்ணளவாக்கம் மூலம் காண்போம்.

- 17 இற்கு மிகக் கிட்டிய குறைந்த நிறைவர்க்க எண் 16 ஐயும் 17 இற்கு மிகக் கிட்டிய கூடிய நிறைவர்க்க எண் 25 ஐயும் காண்க. அப்போது $16 < 17 < 25$ ஆகும்.
- அவ்வெண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் வர்க்கமூலத்தை எழுதுக.

$$\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$$

$$4 < \sqrt{17} < 5$$

இதற்கேற்ப 17 இன் வர்க்கமூலம் 16 இன் வர்க்கமூலமாகிய 4 இலும் கூடியது. 25 இன் வர்க்கமூலமாகிய 5 திலும் குறைந்தது.

அதாவது, $\sqrt{17}$ இன் பெறுமானம் 4 இற்கும் 5 இற்குமிடையே காணப்படும்.

மேலும் $\sqrt{17}$ இன் பெறுமானத்திற்கான ஒரு கிட்டிய அண்ணளவாக்கத்தைக் காண்பதற்கு 17 ஆனது 16 இற்கா 25 இற்கா மிகக் கிட்டியதெனக் காண்போம்.

16 இற்கும் 17 இற்குமிடையே வித்தியாசம் 1 ஆகும்.

17 இற்கும் 25 இற்குமிடையே வித்தியாசம் 8 ஆகும்.

$\therefore$ 17 ஆனது 16 இற்குக் கிட்டியதாகும்.

$\therefore \sqrt{17}$ ஆனது 4 இற்குக் கிட்டிய ஒரு பெறுமானம் ஆகும்.

அதாவது 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 ஆகிய எண்களில் ஓர் எண் $\sqrt{17}$ இற்குக் கிட்டிய பெறுமானமாகும்.

- அவ்வெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் அதே எண்ணினால் பெருக்கும்போது விடையாக 17 இற்குக் கிட்டிய பெறுமானம் பெறப்படும் எண்ணை அறிந்து கொள்வோம்.

$4.1 \times 4.1 = 16.81$

$4.2 \times 4.2 = 17.64$

16.81 இற்கும் 17.64 இற்கும் இடையில் 17 இருப்பதால் 4.3 × 4.3 ஐயும் 4.4 × 4.4 ஐயும் காண்பது அவசியம் இல்லை.

17 இற்கு கிட்டிய பெறுமானம் 16.81 ஆகும்.

4.1 ஆனது $\sqrt{17}$ இன் முதலாம் அண்ணளவாக்கமாகும்.

உதாரணம் 2

$\sqrt{245}$ இன் பெறுமானத்தை அண்ணளவாக்கம் மூலம் காண்போம்.

$$225 < 245 < 256$$

$$\sqrt{225} < \sqrt{245} < \sqrt{256}$$

$$15 < \sqrt{245} < 16$$

$\sqrt{245}$ இன் பெறுமானம் 15 இற்கும் 16 இற்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணாகும். 245 ஆனது 256 இற்கு கிட்டியதால் $\sqrt{245}$ இன் பெறுமானம் 16 இற்குக் கிட்டிய ஓர் எண்ணாகும்.

$15.9 \times 15.9 = 252.81$

$15.8 \times 15.8 = 249.64$

$15.7 \times 15.7 = 246.49$

$15.6 \times 15.6 = 243.36$

245 இற்கு மிகக் கிட்டிய பெறுமானம் 246.49 ஆகும்.

$\therefore \sqrt{245}$ இன் முதலாம் அண்ணளவாக்கம் 15.7 ஆகும்.

பயிற்சி 2.1

பின்வரும் எண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் வர்க்கமூலத்தை அண்ணளவாகக் காண்க.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{20}$ (iii) $\sqrt{67}$ (iv) $\sqrt{115}$ (v) $\sqrt{1070}$

2.2 வர்க்க மூலத்தைக் காண்பதற்கான வகுத்தல் (சாதாரண) முறை

நிறைவர்க்க எண்களின் வர்க்க மூலத்தைக் காண்பதற்கு மாத்திரம் முதன்மைக் காரணி முறை பயன்படுத்தப்படுகின்றது. நிறைவர்க்கம் அல்லாத ஓர் எண்ணின் வர்க்க மூலத்தை அண்ணளவாக்கத்தினால் காணலாம்.யாதாயினும் ஒரு நேர் எண்ணின் வர்க்கமூலத்தின் மிகக் கிட்டிய பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு வர்க்க மூலத்தைக் காண்பதற்கான பொது முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

1764 இன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்போம்.

படி 1

1764 ஐ ஒன்றினிடத்திலிருந்து இடப்பக்கமாக இரு இலக்கங்கள் வீதம் பின்வருமாறு வேறுபடுத்துக.

17, 64

படி 2

அவ்வாறு வேறுபடுத்திய பின்னர் முதலில் வரும் இலக்கத்தின் அல்லது இரு இலக்கங்களினாலும் காட்டப்படும் எண்ணிலும் குறைந்த மிகக் கிட்டிய நிறைவர்க்க எண்ணின் வர்க்கமூலத்தைக் கோட்டிற்கு மேலேயும் கோட்டிற்கு இடப்பக்கத்திலும் பின்வருமாறு எழுதுக.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & 17\ \ 64 \end{array}$$

$16 < 17$

$4^2 < 17$

படி 3

கோட்டிற்கு மேலே உள்ள எண்ணினதும் இடப்பக்கத்தில் உள்ள எண்ணினதும் பெருக்கமாகிய 4 × 4 ,அதாவது 16 ஐக் கீழே காட்டியுள்ளவாறு எழுதுக.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & 17\,64 \\ & \underline{16} \\ & \ \ 1 \end{array}$$

படி 4

இப்போது அடுத்த இரு எண்களாகிய 64 ஐப் பின்வருமாறு எழுதுக.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & 17\,64 \\ & \underline{16} \\ & \ \ 1\,64 \end{array}$$

படி 5

அடுத்ததாகக் கோட்டிற்கு மேலே உள்ள எண்ணின் இரு மடங்காகிய 8 ஐ ஓர் இலக்கம் எழுதப்படத்தக்கதாக இடம் விட்டுக் கீழே காட்டியுள்ளவாறு இடப்பக்கத்தில் எழுதுக.(அதாவது ஒன்றினிடத்தின் பெறுமானத்திற்கு ஒரு வெற்றிடத்தைக் கருதுக).

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & 17\ 64 \\ & \underline{16} \\ 4\times 2=8 \rightarrow 8\ \square & \ 1\ 64 \end{array}$$

படி 6

கோட்டிற்கு மேலே 4 இற்கு வலப்பக்கத்திலும் கோட்டிற்கு இடப்பக்கத்தில் வெற்றிடமாக வைக்கப்பட்ட இடத்திலும் ஒரே இலக்கத்தை இடுக.

8 $\square$ × $\square$ = 164 இலுங் குறைந்த மிகக் கிட்டிய பெறுமானம் கிடைக்கத்தக்கதாக இலக்கத்தைத் தெரிந்தெடுத்தல் வேண்டும்.

$$\begin{array}{r|l} & 4\ \boxed{2} \\ \hline 4 & 17\ 64 \\ & \underline{16} \\ 8\ \boxed{2} & \ 1\ 64 \\ & \underline{\ 1\ 64} \\ & \quad\ \ 0 \end{array}$$

இதற்கேற்ப $\sqrt{1764} = 42$ ஆகும்.

ஒரு தசம எண்ணின் வர்க்க மூலத்தைக் காணும்போது தசமப் புள்ளியிலிருந்து இரு பக்கங்களிலும் இரு எண்கள் வீதம் கீழே காட்டியுள்ளவாறு வேறுபடுத்துக.

3.61 ⟶ 3. 61

12.321 ⟶ 12. 32 10

143.456 ⟶ 1 43. 45 60

உதாரணம் 2

$\sqrt{3.61}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\begin{array}{r|l} & 1.\ \boxed{9} \\ \hline 1 & 3.\ 61 \\ & \underline{1} \\ 1\times 2=2 \rightarrow 2\ \boxed{9} & 2\ \ 61 \\ & \underline{2\ \ 61} \\ & \quad 00 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{3.61} = 1.9$$

உதாரணம் 3

$\sqrt{2737}$ இன் பெறுமானத்தை இரு தசமதானங்களுக்குக் காண்க.

		5 [2] . [3] [1] [6]
	5	27 37. 00 00 00
		25
5 x 2 = 10	→ 10 [2]	2 37
		2 04
52 x 2 = 104	→ 104 [3]	33 00
		31 29
523 x 2 = 1046	→ 1046 [1]	1 71 00
		1 04 61
5231 x 2 = 10462	→ 10462 [6]	66 39 00
		62 77 56
		3 61 44

← மீதியாக 33 கிடைக்கிறது. அவ்வாறு மீதிப் பெறுமானம் உள்ளபோது “00” சோடியைச் சேர்ப்பதால் மிகக் கிட்டிய ஒரு பெறுமானத்தைக் கண்டு கொள்ளலாம்

$$\therefore \sqrt{2733} \approx 52.32$$

உதாரணம் 4

$\sqrt{3.421}$ இன் பெறுமானத்தை இரண்டு தசம தானங்களுக்குக் காண்க.

	1. [8] [4] [9]
	3. 42 10 00
	1
2 [8]	2 42
	2 24
36 [4]	18 10
	14 56
368 [9]	3 54 00
	3 32 01
	21 99

$$\therefore \sqrt{3.421} \approx 1.85$$

பயிற்சி 2.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணினதும் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.
   (i) 676 (ii) 1024 (iii) 2209 (iv) 2809 (v) 3721
2. (i) $\sqrt{8}$ (ii) $\sqrt{19}$ (iii) $\sqrt{26}$
   (iv) $\sqrt{263}$ (v) $\sqrt{2745}$ (vi) $\sqrt{3630}$
3. (i) $\sqrt{5.4}$ (ii) $\sqrt{3.45}$ (iii) $\sqrt{15.3}$ (iv) $\sqrt{243.2}$
   (v) $\sqrt{4061.3}$ (vi) $\sqrt{85.124}$ (vii) $\sqrt{0.0064}$ (viii) $\sqrt{0.000144}$

2.3 வர்க்கமூலத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

உதாரணம் 1

பரப்பளவு 441 cm^2 உள்ள ஒரு சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளத்தைக் காண்க.

சதுரத்தின் பரப்பளவு = (ஒரு பக்கத்தின் நீளம்)^2

சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளம் = $\sqrt{\text{சதுரத்தின் பரப்பளவு}}$

சதுரத்தின் பரப்பளவு = 441 cm^2

சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளம் = $\sqrt{441}$

= 21 cm

உதாரணம் 2

சதுர வடிவிலான ஒரு வீட்டுத் தோட்டம் முற்றாக மூடப்படுமாறு 900 cm^2 பரப்பளவையுடைய சதுர வடிவிலான 324 பீங்கான் கற்கள் பதிக்கப்பட்டுள்ளன. வீட்டுத் தோட்டத்தின் ஒரு பக்க நீளத்தைக் காண்க.

ஒரு நிரையில் பதிக்கத் தேவையான பீங்கான் கற்களின் எண்ணிக்கை $= \sqrt{324}$

$= 18$

ஒரு பீங்கான் கல்லின் நீளம்

$= \sqrt{900}$ cm

$= 30$ cm

வீட்டுத் தளத்தின் ஒரு பக்க நீளம்

$= 18 \times 30$ cm

$= 540$ cm

$= 5.4$ m

பயிற்சி 2.3

1. $1225\ cm^2$ பரப்பளவுள்ள ஒரு காட்போட் துண்டின் ஒரு பக்க நீளம் யாது?

2. பக்கங்களின் நீளம், அகலம் முறையே 27 cm , 12 cm என்னும் பக்கங்களை உடைய ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமமான ஒரு சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளம் யாது?

3. 196 பிள்ளைகள் ஓர் உடற்பயிற்சிக் கண்காட்சிக்காக நிரைகளினதும் நிரல்களினதும் எண்ணிக்கை சமனாகுமாறு நிறுத்தப்பட்டுள்ளனர். ஒரு நிரையிலுள்ள பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை யாது?

4. ஒரு சதுரமுகியின் மேற்பரப்பளவு $1350\ cm^2$ ஆகும். சதுரமுகியின் ஒரு பக்க நீளத்தைக் காண்க.

5. சதுர வடிவிலான முகங்களையுடைய 200 கற்களைப் பத்து நிரைகளில் பதிப்பதன் மூலம் செவ்வக வடிவிலான ஒரு பாதை அமைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு கல்லின் பரப்பளவு $231.04\ cm^2$ ஆயின், பாதையின் நீளம், அகலம் என்பவற்றைக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. பெறுமானம் காண்க.
   (i) $\sqrt{3669}$ (ii) $\sqrt{4302}$ (iii) $\sqrt{22.79}$ (iv) $\sqrt{0.1296}$ (v) $\sqrt{5.344}$

2. ஒரு செவ்வகக் காணியின் நீளமும் அகலமும் முறையே 25 m , 12 m ஆகும். காணியின் ஒரு மூலையில் உள்ள ஒரு பிள்ளை எதிர் மூலைக்குச் செல்ல வேண்டிய இழிவுத் தூரத்தைக் கிட்டிய மீற்றருக்குக் காண்க.

3. ஓர் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்தின் நீளம் 12 cm எனின், எஞ்சியுள்ள ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க. (விடையை இரு தசம தானங்களுக்குக் காட்டுக).

4. 9, 16, 25, ... ஓர் எண் கோலம் ஆகும். 729 ஆனது எண் கோலத்தின் எத்தனையாவது உறுப்பாகும்?

3

பின்னங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,
- பின்னங்கள் பயன்படுத்தப்படும் சந்தர்ப்பங்களை இனங்காண்பதற்கும்
- பின்னங்களுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

பின்னங்கள்



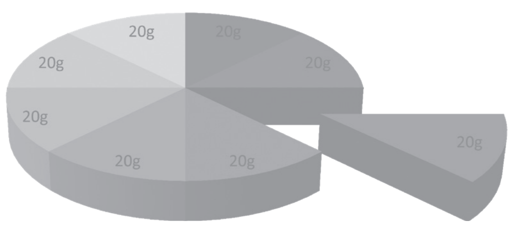
உருவில் ஒரு குறித்த வகைச் சொக்களேற்றுக் காணப்படுகின்றது. அது எளிதாகத் துண்டுகளாக உடைக்கப்படத்தக்கதாகப் பத்துச் சம பகுதிகளாகப் பிரித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது.
முழுச் சொக்களேற்றையும் ஓர் அலகாகக் கருதும்போது அதிலிருந்து வேறாக்கப்பட்ட

ஒரு துண்டு முழுச் சொக்களேற்றின் $\frac{1}{10}$ எனவும்

இரு துண்டுகள் முழுச் சொக்களேற்றின் $\frac{2}{10}$ எனவும்

மூன்று துண்டுகள் முழுச் சொக்களேற்றின் $\frac{3}{10}$ எனவும் காட்டலாம். மற்றைய துண்டுகளின் அளவையும் இவ்வாறு காட்டலாம்.

இவ்வாறு ஒரு முழு அலகிலிருந்து வேறாக்கப்பட்ட பகுதிகளாகிய $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$ ஆகியன பின்னங்கள் எனப்படும்.
இனி இன்னோர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

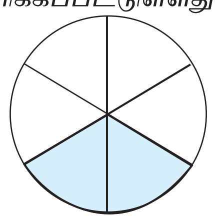


இவ்வுருவில் ஒரு குறித்த வகைப் பாற்கட்டி பைக்கற்று காணப்படுகின்றது. அது எட்டுச் சம பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. அதன் ஒரு பகுதி வேறாக்கி எடுக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துண்டு பைக்கற்றில் உள்ள பாற்கட்டியின் $\frac{1}{8}$ ஆகும்.

முழுப் பாற்கட்டியும் 160 g திணிவைக் கொண்டிருப்பின் வேறாக்கி எடுத்த துண்டு அதில் $\frac{1}{8}$ ஆன 20 g திணிவைக் கொண்டுள்ளது. 160 g ஆன பாற்கட்டியின் மொத்தத் திணிவு அதன் ஓர் அலகாகக் கருதப்படுகின்றது. பின்னங்கள் பற்றிக் குறிப்பிடும் போது அது பெறப்பட்ட முழு அலகையும் பற்றிக் கருதுதல் வேண்டும். உதாரணமாக "ஒரு வகுப்பில் உள்ள முழு மாணவர்களினதும் $\frac{2}{3}$ ஆனோர் பெண் பிள்ளைகளாவார்" என்னும் கூற்றில் இங்கு $\frac{2}{3}$ என்னும் பின்னத்தைக் காட்டுவதற்கு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஆனது ஓர் அலகாகக் கருதப்பட்டுள்ளது. பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பங்களினதும் முழு அலகுகள் தரப்பட்டுள்ளன.

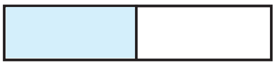
சந்தர்ப்பம்	முழு அலகு
(i) வளி மண்டலத்தின் $\frac{1}{5}$ இல் ஒட்சிசன் உள்ளது.	வளிமண்டலத்தின் கனவளவு
(ii) 50 லீற்றர் நீரில் $\frac{1}{4}$ ஆனது பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.	50 லீற்றர் நீர்
(iii) 200 m^2 நிலத்தின் $\frac{2}{3}$ இல் மரக்கறி பயிரிடப்பட்டுள்ளது.	200 m^2 நிலம்
(iv) பெற்ற விளைச்சலில் $\frac{1}{4}$ பயன்பாட்டிற்கு வைக்கப்பட்டுள்ளது.	பெற்ற விளைச்சலின் அளவு
(v) 5 m நீளமுள்ள ஒரு கம்பியின் $\frac{3}{4}$ வெட்டப் பட்டுள்ளது.	5 m நீளமுள்ள கம்பி
(vi) 25 தோடம்பழங்களில் $\frac{1}{5}$ பழுதடைந்துள்ளன.	25 தோடம்பழங்கள்
(vii) ஒரு தந்தை தனது தோட்டத்தில் அரைப் பங்கை (அதாவது $\frac{1}{2}$) மகனுக்கு வழங்கினார்.	தோட்டத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு

உருவில் உள்ள வட்ட வடிவம் ஆறு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அதில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பின்னம் $\frac{2}{6}$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

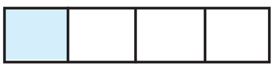


$\frac{2}{6}$ இல் 6 பகுதியெண்ணும் 2 தொகுதியெண்ணும் ஆகும். அலகு பிரிக்கப்பட்டுள்ள பகுதிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை பகுதியெண் ஆகும். வேறாக்கப்பட்டுள்ள பகுதிகளின் எண்ணிக்கை தொகுதியெண் ஆகும். இங்கு தொகுதியெண் பகுதியெண்ணிலும் சிறியதாகும். இவ்வாறு பெறும் பின்னங்கள் முறைமைப் பின்னங்கள் (உள்ளபடியான பின்னங்கள்) எனப்படும். இதற்கேற்ப, **முறைமைப் பின்னத்தின் தொகுதி பகுதியிலும் சிறியதாகும்.**

தொகுதி 1 ஆன $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ போன்ற பின்னங்கள் **அலகுப் பின்னங்கள்** ஆகும்.
உருவில் ஒரே அலகிலிருந்து பெற்ற $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ஆகியவற்றைக் காட்டும் மூன்று சந்தர்ப்பங்கள் நிழற்றிக் காட்டப்பட்டுள்ளன.
(இங்கு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு ஓர் அலகாகக் கொள்ளப்படும்)

$\frac{1}{2}$ 

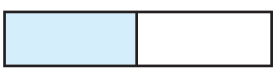
$\frac{1}{3}$ 

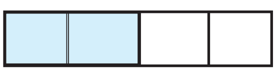
$\frac{1}{4}$ 

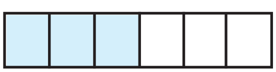
இவ்வுருக்களுக்கேற்ப $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ என்பது தெளிவாகும்.

அவ்வாறே தொகுதி எண் சமமான, ஆனால் பகுதியெண் சமமற்ற $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}$ போன்ற பின்னங்களிலும் பகுதியெண் பெரிதாகும்போது அப்பின்னங்களால் குறிப்பிடப்படும் பெறுமானங்கள் பருமனில் குறைகின்றன.
அதாவது $\frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5} > \frac{2}{6}$ ஆகும்.

ஒரே அலகிலிருந்து பெறப்பட்ட $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ ஆகிய மூன்று பின்னங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$\frac{1}{2}$ 

$\frac{2}{4}$ 

$\frac{3}{6}$ 

உருவிற்கேற்ப அம்மூன்று பின்னங்களினாலும் காட்டப்படும் பருமன்கள் சமனாகும். அதாவது $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ ஆகும்.

இத்தகைய ஒன்றுக்கொன்று சமமான பின்னங்கள் **சமவலுப் பின்னங்கள்** எனப்படும். ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியையும் பகுதியையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்குவதன் மூலம் சமவலுப் பின்னங்களைப் பெறலாம்.
உதாரணங்களாக,

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{2}{4}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{3}{6}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1\times 5}{2\times 5} = \frac{5}{10}$$

தொகுதியையும் பகுதியையும் ஒரே எண்ணினால் வகுப்பதன் மூலமும் சமவலுப் பின்னங்கள் பெறப்படும்.

$$\frac{5}{10} = \frac{5\div 5}{10\div 5} = \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{6} = \frac{3\div 3}{6\div 3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{8}{16} = \frac{8\div 8}{16\div 8} = \frac{1}{2}$$

இப்போது $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ என்னும் ஒன்றுக்கொன்று பருமனில் சமனற்ற, ஒரே அலகிலிருந்து பெற்ற இரு பின்னங்களைக் கருதுவோம்.

இப்போது நாம் $\frac{2}{3}$ இற்கும் $\frac{3}{4}$ இற்கும் பொருத்தமான சில சமவலுப் பின்னங்களை எழுதுவோம்.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{8}{12}} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \boxed{\frac{16}{24}} = \frac{18}{27} = \ldots$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{9}{12}} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \boxed{\frac{18}{24}} = \frac{21}{28} = \ldots$$

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ என்னும் பின்னங்களுக்குச் சமவலுவாகும் பின்னங்களிலிருந்து ஒரே பகுதி உள்ள பின்னங்களும் உள்ளன என்பது தெரிகிறது. $\frac{8}{12}, \frac{9}{12}$ என்பன இவ்வாறான இரண்டு பின்னங்களாகும். $\frac{16}{24}, \frac{18}{24}$ என்பன இவ்வாறான மேலும் இரண்டு பின்னங்களாகும். அவற்றில் மிகச் சிறிய பொதுப் பகுதி உள்ள பின்னங்களாகிய $\frac{8}{12}, \frac{9}{12}$ ஆகியவற்றைத் தெரிந்தெடுப்போம்.

$\frac{8}{12}, \frac{9}{12}$ ஆகியவற்றை ஒப்பிடும்போது $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ ஆகும்.
ஆயினும் $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ உம் $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ உம் ஆகையால் $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ என நாம் முடிவெடுக்கலாம்.

மேலே சமவலுப் பின்னங்களின் கீழ் $\frac{3}{4}$ ஐயும் $\frac{2}{3}$ ஐயும் ஒப்பிடுதலை ஒரு வரிப்படத்தினாலும் விளக்குவோம்.

$\frac{2}{3}$ 

$\frac{3}{4}$ 

உருவின்படி $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ என்பது தெளிவாகும். இதற்கேற்பப் பின்னங்களை ஒப்பிடும்போது பொதுப் பகுதியெண்ணைக் கொண்ட சமவலுப் பின்னங்களில் எழுதிக்கொள்வது பொருத்தமானது என்பது தெளிவாகும்.

இனி, பின்னங்கள் கூட்டப்படுதல், கழிக்கப்படுதல் என்பவற்றைக் கருதுவோம்.

முன்னைய வகுப்புகளில் $\frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$ என்பது போன்ற பகுதியெண் சமனாகவுள்ள பின்னங்களைக் கூட்டுவதற்குக் கற்றுள்ளீர்கள். அவ்வாறே $\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$ போன்ற பகுதி சமனாகவுள்ள பின்னங்களைக் கழிக்க முடியும் என்பதையும் கண்டுள்ளீர்கள். பகுதியெண் சமனற்ற பின்னங்களைக் கூட்டும்போதும் கழிக்கும்போதும் உரிய பின்னங்களைப் பொதுப் பகுதியெண்ணைக்கொண்ட சமவலுப் பின்னங்களாக மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

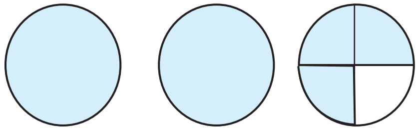
உதாரணமாக

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} - \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$$

ஓரலகிற்கு மேற்பட்ட அளவுகளை வகைகுறிப்பதற்கும் பின்னங்களைப் பயன் படுத்தலாம். உதாரணமாக ஒரு பாணின் $\frac{3}{2}$ எனக் குறிப்பிடுவது எந்த அளவை எனப் பார்ப்போம். இதன் மூலம் தரப்படுவது ஒரு பாணை இரண்டு சமனான துண்டுகளாக வெட்டிப் பெறப்படும் பகுதியைப் போன்று மூன்று துண்டுகளைக் குறிக்கும். அது ஒன்றரை பாணின் அளவுடையதாகும். அதாவது $1 + \frac{1}{2}$ பாண் அல்லது சுருக்கமாக $1\frac{1}{2}$ பாண் அளவுடையதாகும்.

மேலும் ஓர் உதாரணமாக, ஒரு வட்டத்தின் $2\frac{3}{4}$ என்னும் அளவை உருவில் மூலம் காட்டுவோம்.



மூன்று உருக்களையும் தனித்தனியாக அன்றி ஒன்றாக எடுத்து **ஒரே அலகாகக்** கருதினால் இது $\frac{11}{12}$ வகைகுறிக்கப்படும். எனினும் ஒரு கலப்பெண் ஆகையால் ஒவ்வோர் உருவையும் தனித்தனியாக எடுத்து இரு முழு ஒன்றுகளையும் மற்றைய அலகில் ஒரு பகுதியை எடுக்கும்போது $\frac{11}{4}$ வகைகுறிக்கப்படும். அப்போது $2\frac{3}{4}$ என்னும் கலப்பெண்ணை $\frac{11}{4}$ ஆக எடுத்துரைக்கலாம். அப்பின்னத்தின் தொகுதி பகுதியிலும் பார்க்கப் பெரியது. அத்தகைய பின்னம் **முறைமையில்லாப் பின்னம்** எனப்படும்.

$$2\frac{3}{4} = 1+1+\frac{3}{4}$$

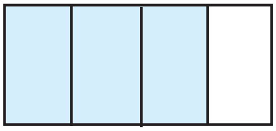
$$= \frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4}$$

$$= \frac{11}{4}$$

இதற்கேற்ப $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ என்பது தெளிவாகும். $2\frac{3}{4}$ என எழுதும்போது அது கலப்புப் பின்னம் எனப்படும். ஒரு முறையில்லாப் பின்னத்தை கலப்புப் பின்னமாகவும் ஒரு கலப்புப் பின்னத்தை முறைமையில்லாப் பின்னமாகவும் மாற்றும் முறையை முன்னைய தரங்களில் கற்றுள்ளீர்கள்.

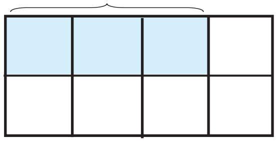
இப்போது நாம் பின்னங்களைப் பெருக்கல் பற்றியும் நினைவுபடுத்துவோம். அதற்காக $\frac{3}{4}$ இன் $\frac{1}{2}$ எவ்வளவெனப் பார்ப்பதற்கு அதனைப் பின்வருமாறு வரிப்பட முறையில் காட்டுவோம்.

$\frac{3}{4}$



$\frac{3}{4}$ இன் $\frac{1}{2}$

$\frac{3}{8}$



உருவின்படி $\frac{3}{4}$ இன் $\frac{1}{2}$ என்பது $\frac{3}{8}$ என்பது தெளிவாகும்.

$\frac{3}{4}$ இன் $\frac{1}{2}$ ஐப் பின்வருமாறு சுருக்குவதன் மூலமும் மேற்குறித்த விடையைப் பெறலாம்.

$$\frac{3}{4} \text{ இன் } \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{8}$$

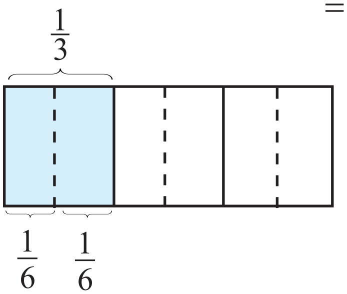
''இன்'' என்பது பெருக்குவதற்கான கணிதச் செய்கை என்பதும் தொகுதி 3×1 எனவும் பகுதி 4×2 எனவும் அமையும் என்பதும் தெளிவாகும்.

இப்போது பின்னங்களை வகுக்கும் சந்தர்ப்பங்களைக் கருதுவோம்.

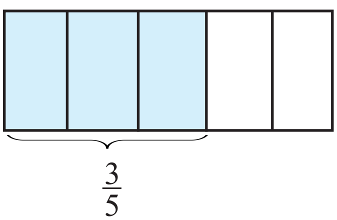
இப்போது நாம் ஓரலகின் $\frac{1}{3}$ இல் அதே அலகின் எத்தனை $\frac{1}{6}$ கள் இருக்கின்றன என்பதை ஓர் உருவைக் கொண்டு பார்ப்போம்.

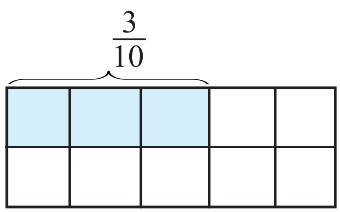
$$\frac{1}{6} \text{ களின் எண்ணிக்கை } = \frac{1}{3} \div \frac{1}{6}$$

$$= 2$$



ஓரலகின் $\frac{3}{5}$ இன் அரைவாசியைப் பெறுவோம்.





உருவிற்கேற்ப $\frac{3}{5}$ இன் அரைவாசி $= \frac{3}{10}$

உருவிற்கேற்ப $\frac{3}{5}$ இன் அரைவாசி $= \frac{3}{5} \div 2$

$$= \frac{3}{10}$$

எப்போதும் உருக்களைக் கொண்டு பின்னங்களை வகுத்தல் ஒரு கஷ்டமான பணியாகும். அதற்காக வேறொரு முறையை இனங்காணுதல் வேண்டும். உருக்களைக் கொண்டு செய்யப்பட்ட மேற்குறித்த வகுத்தலை மறுபடியும் பின்வருமாறு பார்ப்போம்.

$$\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \div \frac{2}{1}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$$ ($2 = \frac{2}{1}$ என்பதால்)

($\frac{2}{1}$ ஆல் வகுப்பதற்குப் பதிலாக $\frac{1}{2}$ ஆல் பெருக்கும்போது)

$$= \frac{3}{10}$$

உருவிற்கேற்பக் கிடைத்த விடையே பெறப்படுகின்றது.

அது $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}$ இற்கும் பொருந்துமாவெனப் பார்ப்போம். $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{6}^2}{1}$

$$= 2$$

$\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}$ இல் $\frac{1}{6}$ இனால் வகுப்பதற்குப் பதிலாக இன் $\frac{1}{6}$ நிகர்மாற்றான $\frac{6}{1}$ இனால் பெருக்குவதனாலும் உருவிற்கேற்பப் பெற்ற விடை கிடைக்கின்றது.
ஒரு பின்னம் வேறொரு பின்னத்தினால் வகுக்கப்படும்போது இரண்டாம் பின்னத்தின் நிகர்மாற்றினால் பெருக்கப்படுகின்றது. பொதுவாக $\frac{a}{b}$ வடிவிலான ஒரு பின்னத்தின் நிகர்மாறு $\frac{b}{a}$ ஆகும்.

பின்வரும் சுருக்கலின் மூலம் பின்னங்கள் பற்றி இதுவரைக்கும் கற்ற எல்லா விடயங்களையும் மறுபடியும் நினைவுபடுத்துவோம்.

$$\left(2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) \div \left(1\frac{2}{3} \text{ இன் } \frac{4}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2} + \frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{\cancel{5}^{1}}{3} \times \frac{4}{\cancel{5}_{1}}\right)$$

$$= \left(\frac{16 - 9 + 5}{6}\right) \div \frac{4}{3}$$

$$= \frac{12}{6} \div \frac{4}{3}$$

$$= 2 \div \frac{4}{3}$$

$$= \frac{{}^{1}\cancel{2}}{1} \times \frac{3}{\cancel{4}_{2}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$= 1\frac{1}{2}$$

பின்னங்களைச் சுருக்கும்போது அடிப்படைக் கணிதச் செய்கைகளின் ஒழுங்கு பின்வருமாறு.

- அடைப்புக்குள் இருக்கும் பகுதிகள் - B - Brackets
- "இன்" தொடர்புபடுத்தப்பட்ட பகுதி - O - Of
- வகுத்தலும் பெருக்கலும் (இடமிருந்து வலமாக) - D - Division, M - Multiplication
- கூட்டலும் கழித்தலும் - A - Addition, S - Subtraction

பின்னங்கள் பற்றிக் கற்ற விடயங்களை மேலும் நினைவுபடுத்துவதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள பின்னங்களை அட்டவணையில் பொருத்தமான பகுதியில் எழுதிப் பூரணப்படுத்துக.

$$\frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{9}, \frac{9}{4}, \frac{19}{15}, \frac{7}{12}, \frac{1}{15}, \frac{7}{8}, \frac{11}{9}, \frac{23}{50}, \frac{22}{7}, \frac{1}{3}, \frac{8}{7}, \frac{6}{5}$$

அலகுப் பின்னங்கள்	
முறைமைப் பின்னங்கள்	
முறைமையில்லாப் பின்னங்கள்	

2. வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

கலப்பெண்	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{5}$	$3\frac{5}{6}$	......	....	......
முறைமையில்லாப் பின்னங்கள்	......	......	......	$\frac{7}{2}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{22}{5}$

3. சமவலுப் பின்னங்கள் கிடைக்கத்தக்கதாக வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

a. $\frac{1}{4} = \frac{1 \times \ldots}{4 \times 3} = \frac{..}{12}$ **b.** $\frac{2}{3} = \frac{\ldots}{12}$ **c.** $\frac{2}{7} = \frac{\ldots}{14}$ **d.** $\frac{4}{16} = \frac{\ldots}{\ldots}$

e. $\frac{8}{20} = \frac{\ldots \div \ldots}{\ldots \div \ldots} = \frac{\ldots}{5}$ **f.** $\frac{10}{12} = \frac{5}{\ldots}$ **g.** $\frac{21}{30} = \frac{7}{\ldots}$ **h.** $\frac{75}{100} = \frac{\ldots}{\ldots}$

4. பின்வரும் பின்னக் கூட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

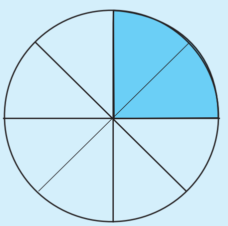
(i) $\frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{5}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \frac{2}{3}$

(iii) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$

5. ஒரு வீட்டில் தினசரி நுகர்ச்சிக்காக நீர் நிரம்பியுள்ள ஒரு தொட்டியிலிருந்து $\frac{3}{4}$ பயன்படுத்தப்படின் நாளின் இறுதியில் அத்தொட்டியில் எஞ்சியுள்ள நீரின் அளவு யாது?

6. *A,B* என்பன நீளத்தில் சமனற்ற இரு கம்பிகளாகும். *A* யின் நீளத்தில் $\frac{1}{3}$ உம் *B* யின் நீளத்தின் $\frac{1}{3}$ உம் சமமா? உங்கள் விடைக்குக் காரணங்கள் தருக.

7. உருவில் உள்ளவாறு எட்டுச் சம பகுதிகளாக வேறுபடுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டில் நிழற்றப்பட்டுள்ள இரு பகுதிகள் வெட்டி அகற்றப்பட்டுள்ளன.



a. எஞ்சியிருக்கும் அளவு தகட்டின் என்ன பின்னமாகும்?

b. எஞ்சியிருக்கும் பகுதியின் அரைவாசி முழுத் தகட்டின் என்ன பின்னமாகும்?

8. சுருக்குக.

a. $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ **b.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ **c.** $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}-1\frac{2}{3}$

d. $\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right)$ இன் $\frac{1}{2}$ **e.** $\left(4\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)\times 1\frac{2}{13}$ **f.** $\left(1\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}\right)$

g. $2\frac{2}{5}\div 1\frac{1}{2}$ இன் $\frac{4}{5}$ **h.** $2\frac{2}{5}\div 1\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}$

9. சந்தைக்கு ரூ. 500 ஐ எடுத்துக் கொண்டு சென்ற தாயார் அப்பணத்தில் காய்கறிகளை வாங்குவதற்கு ரூ. 300 ஐயும் பழங்களை வாங்குவதற்கு ரூ. 150 ஐயும் செலவிட்டார்.

(i) காய்கறிகளை வாங்குவதற்குப் பணத்தின் என்ன பின்னம் செலவிடப் பட்டது?

(ii) பழங்களை வாங்குவதற்குக் கொண்டு சென்ற பணத்தின் என்ன பின்னம் செலவிடப்பட்டது?

(iii) அவர் பொருள்களை வாங்கிய பின்னர் கொண்டு சென்ற பணத்தில் $\frac{1}{4}$ ஐ மீதப்படுத்துவதற்கு முன்கூட்டியே தீர்மானித்திருந்தால், அவருடைய எண்ணம் நிறைவேறியுள்ளதா? உங்கள் விடைக்குக் காரணங்களைத் தருக.

10. ஒரு பயணத்திற்காக வீட்டிலிருந்து புறப்பட்ட சதீஸன் முழுப் பயணத்தின் $\frac{1}{4}$ ஐச் சைக்கிளிலும் $\frac{2}{3}$ ஐப் பேருந்திலும் சென்று எஞ்சியுள்ள பகுதியை முச்சக் கர வண்டியிலும் சென்றார்.

(i) சைக்கிளிலும் பேருந்திலும் சென்ற மொத்தத் தூரம் முழுப் பயணத்தின் என்ன பின்னமாகும்?

(ii) முழுப் பயணத்தின் என்ன பின்னம் முச்சக்கர வண்டியில் செல்வதற்காக எஞ்சியிருந்தது?

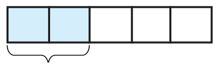
3.1 பின்னங்களின் பயன்பாடு

தினசரி வாழ்வின் பல்வேறு பணிகள் வகுத்தலுடன் தொடர்புப்பட்டு நடைபெறுகின்றன. அப்பணிகளின்போது எழும் பிரச்சினைகளைப் பின்னங்கள் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தி எளிதாகத் தீர்க்கலாம். அத்தகைய சந்தர்ப்பங்கள் இடம்பெறும் சில உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

உதாரணம் 1

குறித்த ஒரு வகை உணவைத் தயாரிப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் மாக்கலவையில் $\frac{2}{5}$ பங்கு குரக்கன் மா ஆகும். எஞ்சியது கோதுமை மா ஆகும். ஒரு சமையல்காரர் 50kg மாக் கலவை ஒன்றைத் தயாரிக்கத் தேவையான குரக்கன் மாவின் அளவையும் கோதுமை மாவின் அளவையும் காண்க.

கலவையிலுள்ள குரக்கன் மாவின் பின்னம் $= \frac{2}{5}$



$\frac{2}{5}$

கலவையிலுள்ள குரக்கன் மாவின் அளவு $= 50$ kg இன் $\frac{2}{5}$

$= 50 \times \frac{2}{5}$

$= 20$kg

கலவையிலுள்ள கோதுமை மாவின் அளவு $= 50 - 20$

$= 30$kg

உதாரணம் 2

சீரான வேகத்தில் நீர் பாயும் ஒரு குழாயைப் பயன்படுத்தி ஒரு தாங்கியின் $\frac{1}{4}$ ஐ நிரப்புவதற்கு 12 நிமிடங்கள் எடுத்தது. இக்குழாயினால் முழுத் தாங்கியையும் நிரப்புவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

தாங்கியின் $\frac{1}{4}$ ஐ நிரப்ப எடுக்கும் காலம் = 12 நிமிடங்கள்

$\therefore$ தாங்கியின் $\frac{4}{4}$ (முழுத் தாங்கியையும்)
நிரப்ப எடுக்கும் காலம் = 12 நிமிடங்கள் $\times 4$

= 48 நிமிடங்கள்

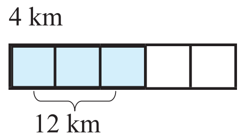
உதாரணம் 3

செல்வனின் வீட்டிலிருந்து பாடசாலைக்கு உள்ள தூரத்தில் $\frac{3}{5}$ ஐப் பேருந்தில் செல்ல இயலும். அது 12 km தூரமாகும். வீட்டிலிருந்து பாடசாலைக்கு உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

வீட்டிலிருந்து பாடசாலைக்கு உள்ள

தூரத்தில் $\frac{3}{5} = 12 \text{ km}$

பாடசாலைக்கு உள்ள தூரத்தில் $\frac{1}{5} = 12 \text{ km} \div 3$



பாடசாலைக்கு உள்ள மொத்தத் தூரம் $= 4 \text{ km} \times 5$

$= 20 \text{ km}$

உதாரணம் 4

ஒரு தொட்டியில் $\frac{4}{5}$ இற்கு நீர் இருந்தது. அதில் 350 l ஐப் பயன்படுத்திய பின்னர் தொட்டியில் $\frac{1}{3}$ இற்கு நீர் எஞ்சியிருந்தது.

(i) பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள நீரின் அளவு முழுத் தொட்டியின் என்ன பின்னமாகும்?
(ii) தொட்டியின் கொள்ளளவைக் காண்க.

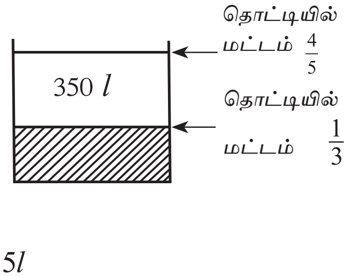
(i) பயன்படுத்திய நீரின் அளவு முழுத் தொட்டியின் பின்னமாக $= \frac{4}{5} - \frac{1}{3}$

$= \frac{12 - 5}{15}$

$= \frac{7}{15}$

முழுத் தாங்கியின் $\frac{7}{15} = 350l$

முழுத் தாங்கியின் $\frac{1}{15} = \frac{350l}{7}$



$\therefore$ தாங்கியின் கொள்ளளவு $= \frac{\overset{50}{\cancel{350}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times 15l$

$= 750l$

மேற்குறித்த உதாரணங்களுக்கேற்பப் பின்வரும் பின்னங்களுடன் தொடர்பான பிரசினங்கள் இடம்பெறும் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 3.2

1. பின்வரும் அளவுகளைக் காண்க.

(i) ரூ. 5 000 இன் $\frac{1}{2}$ (ii) 2 000 ml இன் $\frac{1}{4}$ (iii) 200 m இன் $\frac{3}{4}$

(iv) 250 kg இன் $\frac{3}{5}$ (v) 2.4 l இன் $\frac{2}{3}$ (vi) 4.8 km இன் $\frac{3}{4}$

2. திரு. கணேசன் கடந்த மாதத்திற்கான சம்பளமாக ரூ. 24 000 ஐப் பெற்றார். அவர் அப்பணத்தில் $\frac{3}{8}$ ஐப் பயணச் செலவுகளுக்குப் பயன்படுத்தியிருந்தார். பயணச் செலவுகளுக்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட பணத்தைக் காண்க.

3. ஒரு வீட்டில் நீர் தேக்கி வைக்கப்பட்டிருந்த தொட்டியில் நீர் நிரம்பியிருந்த ஒரு நாள், தொட்டியின் கனவளவின் $\frac{3}{4}$ நீர் பயன்படுத்தப்பட்டது. அப்போது தொட்டியில் 200 லீற்றர் நீர் எஞ்சியிருந்தது.

(i) எஞ்சியிருந்த நீரின் கனவளவு முழுத் தொட்டியின் கனவளவின் என்ன பின்னமாகும்?

(ii) தொட்டியின் கொள்ளளவைக் காண்க.

4. ஒரு காணியின் $\frac{3}{7}$ ஆனது விமலனுக்கு உரியது. அவர் அக்காணியில் தமக்கு உரியதாக அமையாத பகுதியில் $\frac{1}{4}$ ஐக் கொள்வனவு செய்து தொடக்கக் காணியுடன் இணைத்துக் கொண்டார்.

(i) விமலன் கொள்வனவு செய்த காணிப் பகுதி முழுக் காணியின் என்ன பின்னமாகும்?

(ii) முழுக் காணியின் அரைவாசியிலும் கூடிய பகுதி விமலனுக்கு உரியதெனக் காட்டுக.

(iii) விலைக்கு வாங்கிய பின் எஞ்சிய பகுதியின் பரப்பளவு 240 சதுர மீற்றராயின் விமலனுக்குச் சொந்தமான முழுக் காணியின் பரப்பளவு எத்தனை சதுர மீற்றர் எனக் காண்க.

5. ஒரு சைக்கிளைக் கொள்வனவு செய்வதற்குப் பணத்தை மீதப்படுத்தும் விஸ்வநாதன் அதன் பெறுமானத்தில் $\frac{5}{8}$ ஐ மீதப்படுத்தக்கூடியதாக இருந்தது. சைக்கிளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு இன்னும் ரூ. 2 700 தேவைப்பட்டது.

(i) சைக்கிளின் பெறுமானத்தின் என்ன பின்னத்தை மேலும் மீதப்படுத்த வேண்டும்?

(ii) சைக்கிளின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. முகம்மது தனது காணியில் அரைப்பங்கைத் தனது மனைவிக்கும் $\frac{1}{3}$ ஐத் தனது ஒரே மகனுக்கும் பிரித்தெழுதி, எஞ்சிய பகுதியாகிய 10 எயரைத் தர்ம நிலையம் ஒன்றுக்கு நன்கொடையாக அளித்தார்.

(i) முழுக் காணியில் என்ன பின்னம் நன்கொடையாக அளிக்கப்பட்டது?

(ii) முழுக் காணியின் அளவு எத்தனை எயர் ஆகும்?

(iii) தர்ம நிலையத்திற்கு வழங்கிய பகுதி போதியதன்று ஆகையால் அவ்வளவை இருமடங்காக்குவதற்குத் தனது பகுதியிலிருந்து ஒரு பகுதியை வழங்குவதற்கு அவரின் மனைவி விரும்பினார். அவ்வாறு வழங்கிய பின்னர் மனைவிக்கும் மகனுக்கும் காணியின் சம அளவுகள் கிடைக்குமெனக் காட்டுக.

7. ஒரு காணியில் $\frac{7}{8}$ பகுதியில் மிளகும் கராம்பும் பயிரிடப்பட்டுள்ளன. மிளகு பயிரிடப்பட்டுள்ள காணியின் அளவு 450 சதுர மீற்றரும் கராம்பு பயிரிடப்பட்டுள்ள காணியின் பின்னம் முழுக் காணியின் $\frac{1}{4}$ உம் ஆகும்.

(i) காணியில் மிளகு பயிரிடப்பட்டுள்ள பின்னம் யாது?

(ii) முழுக் காணியின் பரப்பளவு யாது?

(iii) கராம்பு பயிரிடப்பட்டுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

8. ஓர் இரும்புக் கம்பியை மூன்று சமபகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றில் ஒரு பகுதி மீண்டும் நான்கு சமபகுதிகளாகப் பிரித்து வெட்டப்பட்டது.

(i) வெட்டிப் பிரிக்கப்பட்ட ஒரு சிறிய துண்டு முழுக் கம்பியின் நீளத்தில் என்ன பின்னமாகும்?

(ii) மேற்குறித்தவாறு வகுத்தலை ஒரு வரைபடத்தின் மூலம் வகைகுறித்து, மேலே (i) இல் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக.

(iii) ஒரு சிறிய துண்டு 70 cm நீளமுள்ளதெனின், தொடக்கக் கம்பியின் முழு நீளத்தையும் காண்க.

3.2 பின்னங்களின் பயன்பாடுகள் மேலும்

ஓர் அலகிலிருந்து ஒரு குறித்த பகுதியை வேறாக்கிய பின்னர் எஞ்சியிருக்கும் பகுதியை மறுபடியும் வேறாக்கும் சந்தர்ப்பங்களும் பின்னங்களின் பயன்பாடுகளில் அடங்குகின்றன.அத்தகைய பின்னங்கள் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு சந்தர்ப்பம் பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் காட்டப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

ராஜன் தனது தந்தையிடமிருந்து பெற்ற பணத்தில் $\frac{2}{3}$ ஐப் புத்தகங்கள் வாங்குவதற்கும் மீதியில் $\frac{1}{4}$ ஐப் போக்குவரத்துச் செலவுகளுக்கும் செலவிட்டான்.

அதன் பின்னர் அவனிடம் ரூ. 500 எஞ்சியிருந்தது.

(i) புத்தகங்களை வாங்கிய பின்னர் ராஜனிடம் தந்தை கொடுத்த பணத்தில் என்ன பின்னம் எஞ்சியிருந்தது?

(ii) தந்தை கொடுத்த பணத்தில் என்ன பின்னம் போக்குவரத்துச் செலவுகளுக்காகச் செலவிடப்பட்டது.

(iii) தந்தையிடமிருந்து கிடைத்த பணத்தைக் காண்க.

(i) புத்தகங்களை வாங்குவதற்கு செலவிட்ட பின்னம் $= \frac{2}{3}$

புத்தகங்களை வாங்கிய பின்னர் மீதிப் பின்னம் $= 1 - \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3}$

(ii) போக்குவரத்துச் செலவுகளுக்காகத் தந்தை கொடுத்த பணத்தில் செலவிட்ட பின்னம் $= \frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{12}$

(iii) புத்தகங்களை வாங்குவதற்கும் போக்குவரத்துச் செலவுகளுக்கும் செலவிடப்பட்டப் பின்னம் $= \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$

$= \frac{8+1}{12}$

$= \frac{9}{12}$

$= \frac{3}{4}$

மேற்குறித்த இரு விடயங்களுக்கும் பணத்தைச் செலவிட்ட பின்னர் எஞ்சியிருக்கும் பின்னம் $= 1 - \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{4}$

தந்தை கொடுத்த பணத்தின் $\frac{1}{4}$ = ரூ. 500

$\therefore$ தந்தை கொடுத்த பணம் = ரூ. 500×4

= ரூ. 2000

பயிற்சி 3.3

1. நகரத்தில் உள்ள ஓர் அலுவலகத்தில் பணியாற்றும் கமல் தமது மாதச் சம்பளத்தில் $\frac{2}{5}$ ஐ உணவிற்காகச் செலவிட்டு மீதியில் $\frac{2}{3}$ ஐத் தமது மனைவிக்கு அனுப்புகின்றார்.

(i) உணவிற்காகச் செலவிட்ட பின்னர் சம்பளத்தில் என்ன பின்னம் எஞ்சியுள்ளது?

(ii) அவர் தமது சம்பளத்தில் என்ன பின்னத்தை மனைவிக்கு அனுப்புகின்றார்?

(iii) அவரிடம் சம்பளத்தில் என்ன பின்னம் எஞ்சியிருக்கின்றது?

2. ஒருவர் குறித்த பணத்தில் $\frac{1}{2}$ ஐ A யிற்கும் மீதியில் $\frac{1}{3}$ ஐ B யிற்கும் கொடுத்த பின்னர் எஞ்சியிருக்கும் பகுதியை C யிற்கும் கொடுத்தார்.

(i) பகிர்ந்த பணத்தில் C யிற்குக் கிடைத்த பின்னத்தைக் காண்க.

(ii) மேற்குறித்தவாறு பகிராமல் மூவருக்குமிடையே சமமாகப் பணத்தைப் பகிர்ந்தால் அப்போது B யிற்குக் கிடைக்கும் அளவானது மேற்குறித்தவாறு பகிரும்போது கிடைக்கும் அளவின் இரு மடங்கெனக் காட்டுக.

(iii) தொடக்கத்தில் குறிப்பட்டவாறு பகிரும்போது C யிற்கு ரூ. 1 000 கிடைக்குமெனின், மூவருக்குமிடையே பகிர்ந்த பணத்தைக் காண்க.

3. ஒரு மண்டபத்தில் தரையின் பரப்பளவின் $\frac{2}{3}$ ஐ வகுப்பறைக்கும் எஞ்சியிருக்கும் தரையின் $\frac{2}{3}$ ஐ அலுவலகத்திற்கும் ஒதுக்கி எஞ்சியிருக்கும் 200 m^2 தரையை நூலகத்திற்கு ஒதுக்கத் தீர்மானிக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) முழுப் பரப்பளவில் என்ன பின்னம் அலுவலகத்திற்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது?

(ii) நூலகத்திற்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள அளவு முழுப் பரப்பளவில் என்ன பின்னமாகும்?

(iii) மண்டபத்தின் தரையின் முழுப் பரப்பளவையும் காண்க.

(iv) வகுபறைக்கும் அலுவலகத்திற்கும் ஒதுக்கப்பட்டுள்ள தரையின் அளவுகளை வெவ்வேறாகக் காண்க.

4. ஓர் உல்லாச பயணத்தில் சென்ற அன்சார் அதற்காகச் செலவிட்ட முழுப்பணத்தில் $\frac{4}{7}$ ஐ உணவிற்காகவும் மீதியில் $\frac{2}{3}$ ஐ போக்குவரத்துக்காகவும் செலவிட்டார். அவற்றைத் தவிர ஏனைய செலவுகளுக்கு ரூ. 800 செலவிடபட்டதெனின், உல்லாசப் பயணத்திற்காக அன்சார் செலவிட்ட மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

5. சரோஜா நூலகத்திலிருந்து கொண்டு வந்த ஒரு புத்தகத்தில் $\frac{1}{3}$ ஐ முதல் நாளில் வாசித்தார். இரண்டாம் நாள் அவர் எஞ்சியிருந்த அளவில் $\frac{1}{2}$ ஐ மாத்திரம் வாசித்தார். மூன்றாம் நாள் அவர் எஞ்சியிருந்த 75 பக்கங்களை வாசித்து முடித்தார். புத்தகத்தில் உள்ள பக்கங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை யாது?

பலவினப் பயிற்சி

1. $3\frac{1}{2}+(1\frac{1}{2}\times.....)=4\frac{1}{2}$ ஆக இருப்பதற்கு வெற்றிடத்திற்குப் பொருத்தமான பின்னத்தைக் காண்க.

2. சுருக்குக. $\dfrac{2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}}{1\frac{1}{5}\div\frac{4}{15}+\frac{1}{2}}$ இன் $\frac{4}{5}$

3. A, B, C ஆகியோர் ஒரு வியாபாரத்தின் மூன்று உரிமையாளர்களாவர். அவர்கள் அவ்வியாபாரத்தில் இட்ட பணத்திற்கேற்பக் கிடைத்த இலாபத்தைப் பகிர்ந்தனர். A யிற்கு இலாபத்தில் $\frac{2}{7}$ ஐயும் அதன் இரு மடங்கை B யிற்கும் கொடுத்து மீதி C யிற்குக் வழங்கப்பட்டது. A, B ஆகிய இருவருக்கும் ரூ. 72 000 ஒதுக்கப்பட்டதெனின், வியாபாரத்தில் கிடைத்த இலாபத்தைக் காண்க.

4. ஒரு குறித்த நிறுவகத்திற்குப் பிரதிநிதி ஒருவரைத் தெரிந்தெடுப்பதற்காக இரு வேட்பாளர்களுக்கிடையே ஒரு தேர்தல் நடைபெற்றது. அதன்போது பதிவு செய்யப்பட்ட எல்லா வாக்காளர்களும் வாக்கைப் பயன்படுத்தினர். வெற்றி பெற்ற வேட்பாளர் முழு வாக்கு எண்ணிக்கையில் $\frac{7}{12}$ ஐப் பெற்ற அதே வேளை அவருடைய மேலதிக வாக்குகளின் எண்ணிக்கை 120 உம் ஆகும்.
   (i) தோல்வியுற்ற வேட்பாளர் மொத்த வாக்கு எண்ணிக்கையில் என்ன பின்னத்தைப் பெற்றார்?
   (ii) பதிவு செய்யப்பட்ட மொத்த வாக்காளர் எண்ணிக்கை யாது? வெற்றி பெற்றவருக்குக் கிடைத்த வாக்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

4

ஈருறுப்புக் கோவைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குவதற்கும்
- ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கத்தை விரிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதக் கோவைகளுடன் தொடர்புபட்ட சுருக்கல்கள் பற்றி நீங்கள் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. சுருக்குக.

a. $2 \times 3a$ **b.** $4 \times (-2x)$ **c.** $(-3) \times 2x$

d. $2x \times 3y$ **e.** $3a \times (-5b)$ **f.** $(-2m) \times 4n$

g. $(-4p) \times (-2q)$ **h.** $3x \times 5x$ **i.** $(-5a) \times 3a$

2. விரித்தெழுதுக.

a. $2(x+1)$ **b.** $3(b+3)$ **c.** $4(y-2)$

d. $-3(a+2)$ **e.** $-2(x-2)$ **f.** $x(2x+3)$

g. $2y(y+1)$ **h.** $-2x(4x+1)$ **i.** $-3b(a-b)$

j. $2(a-b-3c)$

3. விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

(I) a. $x(x+2)+2(x+2)$ **b.** $y(y-3)+3(y-2)$

c. $x(x+1)-3(x-1)$ **d.** $m(m-3n)-n(m-3n)$

(II) a. $(x+5)(x+8)$ **b.** $(x-5)(x+8)$ **c.** $(x+5)(x-8)$

d. $(x-5)(x-8)$ **e.** $(7+a)(3+a)$ **f.** $(2+m)(3-m)$

4.1 இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கம்

மேலே **3** (II) இல் நீங்கள் இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தைச் சுருக்கினீர்கள். வடிவம் $ax + by$ இல் உள்ள இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தின் விரிவுபற்றி இப்பாடத்தில் மேலும் கற்போம். இங்கு ax, by ஆகியன ஈருறுப்புக் கோவையின் இரு உறுப்புகள் எனப்படும்.

உதாரணம் 1

$(3x + 2)\ (2x + 3)$ ஐ விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

$(3x+2)(2x+3)$

$= 3x(2x+3)+2(2x+3)$

$= 6x^2+9x+4x+6$

$= 6x^2+13x+6$

அல்லது

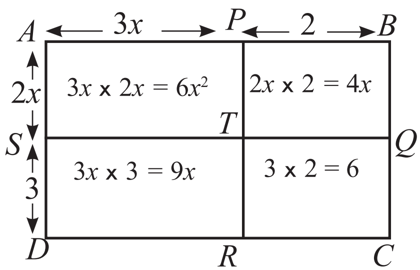
$(3x+2)(2x+3)$

$= (3x+2)\times 2x+(3x+2)\times 3$

$= 6x^2+4x+9x+6$

$= 6x^2+13x+6$

மேலே பெற்ற பேறைச் செவ்வகங்களின் பரப்பளவைக் கொண்டும் காணலாம். (எல்லா அளவீடுகளும் ஒரே அலகில் தரப்பட்டுள்ளன).



செவ்வகம் $ABCD$ யின்

நீளம் $= 3x + 2$

அகலம் $= 2x + 3$

பரப்பளவு $= (3x + 2)\ (2x + 3)$ ——— ①

வேறோரு முறையில்,

செவ்வகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = நான்கு சிறிய செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகை

$= 6x^2 + 9x + 4x + 6$

$= 6x^2 + 13x + 6$ ——— ②

①, ② இலிருந்து,

$(3x + 2)\ (2x + 3) = 6x^2 + 13x + 6$ என்பது தெளிவாகும்.

ஈருறுப்புக் கோவைகளை விரித்தெழுதிச் சுருக்கியுள்ள விதத்தைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களைக் கொண்டு கற்போம்.

உதாரணம் 2

$(3x-2)(2x+5)$

$$\begin{aligned}
&(3x-2)(2x+5)\\
&=3x(2x+5)-2(2x+5)\\
&=6x^2+15x-4x-10\\
&=6x^2+11x-10
\end{aligned}$$

உதாரணம் 3

$(2x+y)(x+3y)$

$$\begin{aligned}
&(2x+y)(x+3y)\\
&=2x(x+3y)+y(x+3y)\\
&=2x^2+6xy+xy+3y^2\\
&=2x^2+7xy+3y^2
\end{aligned}$$

உதாரணம் 4

$(3x+2y)(3x-2y)$

$$\begin{aligned}
&(3x+2y)(3x-2y)\\
&=3x(3x-2y)+2y(3x-2y)\\
&=9x^2-6xy+6xy-4y^2\\
&=9x^2-4y^2
\end{aligned}$$

உதாரணம் 5

$(5a-2b)(2a-3b)$

$$\begin{aligned}
&(5a-2b)(2a-3b)\\
&=5a(2a-3b)-2b(2a-3b)\\
&=10a^2-15ab-4ab+6b^2\\
&=10a^2-19ab+6b^2
\end{aligned}$$

உதாரணம் 6

$(a+b)(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b)$

$$\begin{aligned}
&(a+b)(\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{4}b)\\
&=a(\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{4}b)+b(\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{4}b)\\
&=\tfrac{1}{3}a^2-\tfrac{1}{4}ab+\tfrac{1}{3}ab-\tfrac{1}{4}b^2\\
&=\tfrac{1}{3}a^2+\tfrac{1}{12}ab-\tfrac{1}{4}b^2
\end{aligned}$$

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் ஈருறுப்புக் கோவைகளை விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

a. $(x+2)(x+2)$ **b.** $(x-3)(x-3)$ **c.** $(2x+3)(x+2)$

d. $(2p-5)(p-3)$ **e.** $(3x-1)(3x+1)$ **f.** $(-3x+2)(2x-3y)$

g. $(2a+b)(3a+2b)$ **h.** $(3x-5y)(4x+3y)$ **i.** $(-3p+4q)(3p-2q)$

j. $(-7k-5l)(3k+4l)$ **k.** $(4m-3n)(4m-3n)$ **l.** $(5x-2y)(5x-2y)$

m. $\left(\frac{1}{2}x+y\right)(2x+3y)$ **n.** $\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}q\right)\left(\frac{2}{3}p-\frac{3}{4}q\right)$ **o.** $(3x+4y)(5a+3b)$

2. ஒரு செவ்வக மைதானத்தின் நீளம் $(2a+7)$ மீற்றர் ஆகவும் அகலம் $(2a-3)$ மீற்றர் ஆகவும் இருப்பின், மைதானத்தின் பரப்பளவை a யின் சார்பில் காண்க.

3. கமலா சதுர வடிவிலான ஒரு பூப்பாத்தியை அமைத்தாள். அவளது சகோதரி செவ்வக வடிவிலான ஒரு பாத்தியை அமைத்தாள். சகோதரியின் பூப்பாத்தியின் நீளம் கமலாவின் பூப்பாத்தியிலும் 3 மீற்றர் கூடியதாயிருப்பதுடன் அதன் அகலம் கமலாவின் பூப்பாத்தியிலும் 2 மீற்றர் குறைவானதாகவும் உள்ளது. கமலாவின் பூப்பாத்தியின் ஒரு பக்க நீளம் x எனக் கொண்டு சகோதரியின் பூப்பாத்தியின் நீளம், அகலம் என்பவற்றை x இல் கண்டு அதன் பரப்பளவை $ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவத்தில் தருக.

4. ஒரு பிள்ளை ஓர் அப்பிளின் விலை ரூ. x வீதம் a அப்பிள்களை வாங்கினார்.
(i) அப்பிள்களை வாங்கச் செலவிட்ட பணத்தை a, x ஆகியவற்றில் தருக.

வாங்கிய அப்பிள்களின் எண்ணிக்கையை 5 இனால் கூட்டினால் ஓர் அப்பிளின் விலையை ரூ. 3 இனால் குறைக்கலாமென வர்த்தகர் கூறுகின்றார். இதற்கேற்ப அவர் 5 அப்பிள்களை மேலதிகமாக வாங்குவதற்கு எண்ணியுள்ளார்.

(ii) வாங்குவதற்கு எண்ணியுள்ள அப்பிள்களின் எண்ணிக்கைக்கான ஒரு கோவையை a யின் சார்பில் எழுதுக.
(iii) ஒரு அப்பிளின் விலைக்கான ஒரு கோவையை x இன் சார்பில் எழுதுக.
(iv) அப்பிள்களுக்கான செலவுக்குரிய ஒரு கோவையை a, x ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக
(v) மேலே பகுதி (iv) இல் பெற்ற கோவையைச் சுருக்குக.

4.2 ஈருறுப்புக் கோவைகளை வர்க்கித்தல்

மேற்குறித்த பயிற்சியில் நீங்கள் கற்ற பின்வரும் **1. a, b, l** பிரசினங்களில் எமது கவனத்தை மறுபடியும் செலுத்துவோம். $(x + 2)(x + 2)$, $(x - 3)(x - 3)$, $(5x - 2y)(5x - 2y)$ என்பவற்றில் பெருக்கவுள்ள சில இரு ஈருறுப்புக் கோவைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருப்பதைக் காணலாம்.

அட்சரகணிதத்தில் $x \times x = x^2$ என எழுதுகின்றவாறு, $(x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$ என எழுதலாம்.
அவ்வாறே $(x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$
$(5x - 2y)(5x - 2y) = (5x - 2y)^2$ என எழுதலாம்.

அவ்வாறு எழுதப்பட்ட $(x + 2)^2$, $(x - 3)^2$, $(5x - 2y)^2$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ள கோவைகள் நிறை வர்க்கங்கள் எனப்படும். ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கத்தை விரித்தெழுதுவதற்கு முன்னர் கற்ற ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தை விரித்தெழுதிய அதே முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

$$
\begin{aligned}
(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\
&= x(x+2)+2(x+2)\\
&= x^2+2x+2x+4\\
&= x^2+4x+4
\end{aligned}
$$

$(x+2)^2$ ஐ இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கமாக எழுதி விரித்தெழுதுக. வர்க்கமாக்கலைச் சுருக்குவதை வேறொரு முறையிலும் சொல்லலாம்.$(a+b)^2$, $(a-b)^2$ என்னும் வடிவங்களில் உள்ள கோவைகளின் வர்க்கங்கள் விரித்தெழுதப்படும் முறை பற்றிக் கவனிப்போம்.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\
&= a^2+ab+ba+b^2\\
&= a^2+2ab+b^2
\end{aligned}
$$

இதனை ஒரு சூத்திரமாக நினைவில் வைத்திருப்பது முக்கியமாகும்.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

முதல் உறுப்பின் வர்க்கம் (a^2)

முதல் உறுப்பினதும் இரண்டாம் உறுப்பினதும் பெருக்கத்தின் இரு மடங்கு ($2ab$)

இரண்டாம் உறுப்பின் வர்க்கம் (b^2)

இப்போது $(a-b)^2$ இன் விரிவைக் கவனிப்போம்.

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\
&= a^2-ab-ba+b^2\\
&= a^2-ab-ab+b^2\\
&= a^2-2ab+b^2
\end{aligned}
$$

அதாவது, $\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$

மேலும் $(-a+b)^2 = (-a)^2+2(-a)b+b^2 = a^2-2ab+b^2$

$(-a-b)^2 = (-a)^2+2(-a)(-b)+(-b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^2$, $(-a-b)^2$ ஆகியவற்றின் விரிவுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் எனவும் $(a-b)^2$, $(-a+b)^2$ ஆகியவற்றின் விரிவுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் எனவும் அவதானித்திருப்பீர்கள்.

பின்வரும் உதாரணங்கள் மூலம் மேலும் இவற்றைக் கற்போம்.

உதாரணம் 2

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

உதாரணம் 3

$$(y-2)^2 = y^2 - 2 \times y \times 2 + 2^2$$
$$= y^2 - 4y + 4$$

உதாரணம் 4

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5y + (5y)^2$$
$$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

உதாரணம் 5

$$(3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2 \times (3a) \times (2b) + (2b)^2$$
$$= 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

உதாரணம் 6

$$(-y+5)^2 = (-y)^2 - 2 \times (y) \times 5 + 5^2$$
$$= y^2 - 10y + 25$$

உதாரணம் 7

$$(-2x-3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

எண் பெறுமானங்களை இலகுவாகக் காண்பதற்கு இம்முறை பயன்படுத்தப்படும். அதனைப் பின்வரும் உதாரணங்கள் மூலம் கற்போம்.

உதாரணம் 8

105^2 இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$105^2 = (100 + 5)^2$
$= 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2$
$= 10000 + 1000 + 25$
$= 11\ 025$

உதாரணம் 9

99^2 இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$99^2 = (100 - 1)^2$
$= 100^2 - 2 \times (100) \times (1) + 1^2$
$= 10000 - 200 + 1$
$= 9\ 801$

உதாரணம் 10

$x = 5$, $y = 2$ ஆகியவற்றுக்கு $(x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க

இ.ப.	வ.ப.
$(x+y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
$= (5+2)^2$	$= 5^2 + 2 \times 5 \times 2 + 2^2$
$= 7^2$	$= 25 + 20 + 4$
$= 49$	$= 49$

$\therefore$ இ.ப. = வ.ப.
$\therefore (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ஆகும்.

பயிற்சி 4.3

1. நிரல் A யில் உள்ள வர்க்கங்களின் விரிவை நிரல் B யிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து உரிய வெற்றிடத்தில் எழுதுக.

நிரல் A		நிரல் B
a. $(x+5)^2$	=	$4x^2+4xy+y^2$
b. $(x-5)^2$	=	$4y^2+4xy+x^2$
c. $(2x+5)^2$	=	$x^2-10x+25$
d. $(2x+y)^2$	=	$4x^2-4xy+y^2$
e. $(-2x+5)^2$	=	$x^2-4xy+4y^2$
f. $(x-2y)^2$	=	$4x^2-12xy+9y^2$
g. $(-2x+y)^2$	=	$4x^2+20x+25$
h. $(2x+3y)^2$	=	$4x^2+12xy+9y^2$
i. $(2x-3y)^2$	=	$x^2+10x+25$
j. $(-2y-x)^2$	=	$4x^2-20x+25$

2. பின்வரும் வர்க்கக் கோவைகளை விரித்தெழுதுக.

a. $(x+2)^2$ **b.** $(a+3)^2$ **c.** $(p-3)^2$ **d.** $(y-1)^2$
e. $(2a+3)^2$ **f.** $(3b+2)^2$ **g.** $(3x-1)^2$ **h.** $(4m-5)^2$
i. $(3p+4q)^2$ **j.** $(5m-3n)^2$ **k.** $(-2y+5)^2$ **l.** $(3a-5b)^2$
m. $(-3m+n)^2$ **n.** $(-5m-6n)^2$

3. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள வெற்றிடங்களுக்குப் பொருத்தமான உறுப்பை எழுதுக.

a. $(x+3)^2 = x^2+6x+$ ____ **b.** $(y+2)^2 = y^2+$ ____ $+4$
c. $(m-5)^2 = m^2-10m+$ ____ **d.** $(a+$ ____ $)^2 = a^2+8a+16$
e. $($ ____ $+b)^2 = 25+10b+b^2$ **f.** $($ ____ $-7)^2 = x^2-14x+49$
g. $(-3+$ ____ $)^2 =$ ____ $-6x+x^2$ **h.** $($ ____ $-x)^2 = +16-8x+x^2$

4. ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கமாக எழுதிச் சுருக்குக.

(i) 21^2 (ii) 102^2 (iii) 98^2 (iv) 9.9^2

5. ஒரு சதுர வடிவ அறையின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $(2a+3b)$ மீற்றர் எனத் தரப்பட்டிருப்பின், அறையின் பரப்பளவுக்கான ஒரு கோவையை a, b ஆகிய வற்றின் சார்பில் எழுதுக.

6. $a=2$, $b=3$ ஆகியவற்றிற்கு

(i) $(-a+b)^2 = a^2-2ab+b^2$

(ii) $(-a-b)^2 = a^2+2ab+b^2$

என்பவற்றை வாய்ப்புப் பார்க்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. $(2x + 3y)(x + y) = 2x^2 + 5xy + 3y$ என்பதைப் பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் வாய்ப்புப் பார்க்க.

(i) $x = 3, y = 2$ (ii) $x = 5, y = 0$
(iii) $x = 1, y = 1$ (iv) $x = -1, y = -2$

2. பின்வரும் பின்னக் குணகங்கள் உள்ள ஈருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கங்களை இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கமாக எழுதிச் சுருக்குக.

(i) $(\frac{1}{2}x + y)^2$ (ii) $(\frac{1}{3}a - b)^2$ (iii) $(\frac{1}{4}m - \frac{2}{3}n)^2$

3. இடைவெளிகளை நிரப்புக.

(i) $(x + __)^2 = x^2 + 6x + __$ (ii) $(y + __)^2 = y^2 + 8y + __$

(iii) $(__ - 5)^2 = x^2 - __ + 25$ (iv) $(__ - y)^2 = x^2 - __ + y^2$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கமாக எழுதுவதற்கு அதனுடன் கூட்டப்பட வேண்டிய மறா உறுப்பை எழுதுக. அவற்றை நிறைவர்க்கமாகத் தருக.

(i) $x^2 + 6x$ (ii) $y^2 + 8y$ (iii) $m^2 + 10m$
(iv) $a^2 - 4a$ (v) $x^2 + 4xy$ (vi) $p^2 - 12pq$

5. $x + y = 5$ ஆகவும் $xy = 6$ ஆகவும் இருக்கும்போது $x^2 + y^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. $a - b = 3$ ஆகவும் $ab = 28$ ஆகவும் இருக்கும்போது $a^2 + b^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7. $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$ ஆக இருக்கும்போது $x + y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. $(x+\mathrm{k})^2 = x^2 + 6x + \mathrm{q}$ ஆக இருக்கும்போது k, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

9. $t + \frac{1}{t} = 2$ ஆக இருக்கும்போது $t^2 + \frac{1}{t^2}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

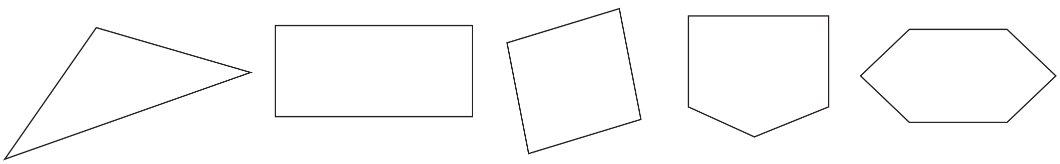
5 முக்கோணிகளின் ஒருங்கிசைவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- இரு தள உருவங்கள் ஒருங்கிசைவதை இனங்காணவும்
- இரு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையத் தேவையான உறுப்புகளை இனங்காணவும்
- முக்கோணிகளின் ஒருங்கிசைவைக் கொண்டு ஏறிகளை நிறுவவும்

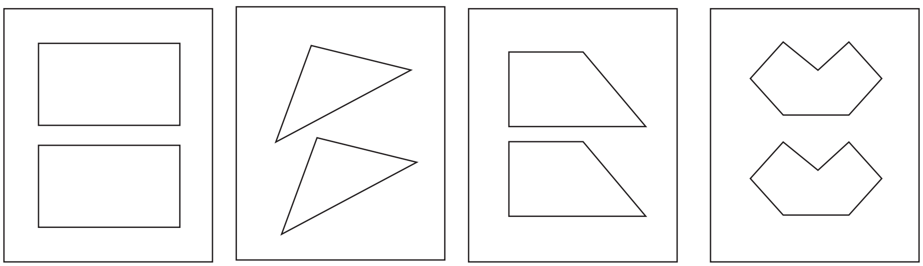
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

இரு தள உருவங்களின் ஒருங்கிசைவு



மேற்குறித்த உருவங்களைப் பரிசீலிக்கும்போது அவை எல்லாம் நேர்கோட்டுத் துண்டங்களினால் அமைக்கப்பட்டுள்ள மூடிய தள உருவங்கள் என்பது தெளிவாகும். அத்தகைய உருவங்கள் நேர்கோட்டுத் தள உருவங்கள் எனப்படும். கோணங்களும் பக்கங்களும் அவ்வுருவங்களின் உறுப்புகள் எனப்படும்.

கீழே (i) தொடக்கம் (iv) வரையுள்ள உருவங்களில் தரப்பட்டுள்ள வடிவத்திலும் அளவிலும் ஒத்த ஒவ்வொரு நேர்கோட்டுத் தள உருவச் சோடியிலும் உள்ள இரு தள உருவங்களையும் ஒன்றோடொன்று பொருந்தச் செய்யலாம்.



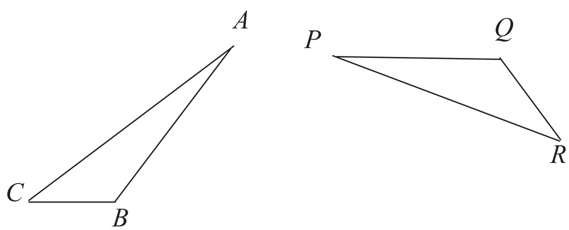
(i) (ii) (iii) (iv)

ஒன்றுடனொன்று பொருந்தச் செய்யக்கூடிய தள உருவச் சோடி ஒருங்கிசையும் தள உருக்கள் என அழைக்கப்படும். இப்பாடத்தில் ஒரு முக்கோணிச் சோடியின் ஒருங்கிசைவு பற்றிக் கவனம் செலுத்தப்படுகிறது.

5.1 இரு முக்கோணிகளின் ஒருங்கிசைவு

ஒரு முக்கோணியில் ஆறு உறுப்புகள் உள்ளன. அவை மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களும் ஆகும்.

பின்வரும் ABC, PQR என்னும் இரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றனவெனக் கொள்வோம். அவ்விரு முக்கோணிகளையும் ஒன்றன்மீதொன்றாக வைத்துப் பொருந்தச் செய்யும்போது AB உடன் PQ வும் AC உடன் PR உம் BC உடன் RQ வும் பொருந்துகின்றனவெனக் கொள்வோம். அப்போது இரு முக்கோணிகளிலும் AB இற்கு ஒத்த பக்கம் PQ எனவும் AC இற்கு ஒத்த பக்கம் PR எனவும் BC இற்கு ஒத்த பக்கம் QR எனவும் கூறப்படும். இவ்வாறே $B\hat{A}C$ இற்கு ஒத்த கோணம் $Q\hat{P}R$ எனவும் $A\hat{B}C$ இற்கு ஒத்த கோணம் $P\hat{Q}R$ எனவும் $A\hat{C}B$ இற்கு ஒத்த கோணம் $P\hat{R}Q$ எனவும் கூறப்படும்.



இதற்கேற்ப ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகும்.

இரண்டு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைகின்றன என்பது "$\equiv$" என்னும் குறியீட்டினால் காட்டப்படும். உதாரணமாக ABC, PQR ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையுமெனின் அது $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$ என எழுதப்படும்.

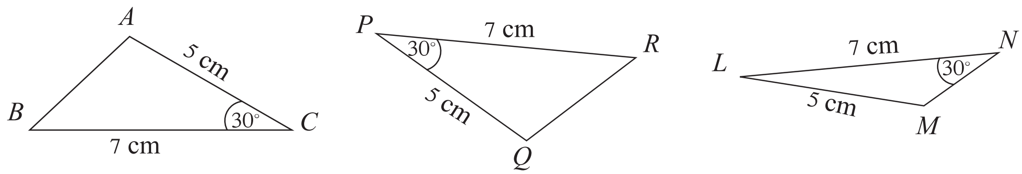
ஒரு முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைவதற்கு மேற்குறித்தவாறு ஒவ்வொரு முக்கோணியினதும் ஆறு உறுப்புகளும் வேறொரு முக்கோணியின் ஆறு உறுப்புகளுக்கும் சமமெனக் காட்டல் அவசியமன்று. அதிலும் குறைவான எண்ணிக்கையான மூன்று உறுப்புகளைச் சமனெனக் காட்டல் போதுமானது. ஆயினும் ஒரு முக்கோணியின் எவையேனும் மூன்று உறுப்புகள் இன்னுமொரு முக்கோணியின் எவையேனும் மூன்று உறுப்புகளுக்குச் சமனானதால் மட்டும் இரண்டு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைவதில்லை. சில சந்தர்ப்பங்களில் மாத்திரம் ஒரு முக்கோணியின் மூன்று உறுப்புகளும் இன்னுமொரு முக்கோணியின் மூன்று உறுப்புகளுக்குச் சமனாகும்போது எஞ்சிய உறுப்புகளும் சமனாகி இரண்டு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையும். அவ்வாறான நான்கு சந்தர்ப்பங்கள் உண்டு. அந்நான்கு சந்தர்ப்பங்களையும் பற்றி இப்போது கவனிப்போம்.

(a) முதலாவது சந்தர்ப்பம்

ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களும் அடை கோணமும் வேறொரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களுக்கும் அடை கோணத்திற்கும் சமமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பம்.

செயற்பாடு

இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 cm, 7 cm ஆகவும் ஒரு கோணத்தின் பெறுமானம் 30° ஆகவும் உள்ள மூன்று முக்கோணிகள் கீழே காணப்படுகின்றன.



- முக்கோணி *ABC* யை ஒரு திசுத் தாளில் பிரதிசெய்து வெட்டுக.
- வெட்டிய முக்கோணி *PQR* முக்கோணி *LMN* உடன் பொருந்துகின்றதாவெனப் பரீட்சிக்க.
- அதற்கேற்ப முக்கோணி *ABC* உடன் ஒருங்கிசையும் முக்கோணியைத் தெரிந்தெடுக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப முக்கோணி *ABC* உடன் முக்கோணி *PQR* மாத்திரம் ஒருங்கிசைகின்றமை தெளிவாகும். எனினும், முக்கோணி *ABC* யிற்குச் சமமான மூன்று உறுப்புகள் மற்றைய இரு முக்கோணிகளிலும் உள்ளன. முக்கோணி *ABC*ஆனது முக்கோணி *PQR* உடன் ஒருங்கிசைந்து, முக்கோணி *LMN* உடன் ஏன் ஒருங்கிசையாமல் இருக்கின்றது என்பது பற்றி நீங்கள் சிந்தித்துப் பார்த்தீர்களா?முக்கோணி *ABC* யில் தரப்பட்டுள்ள கோணம் 30°, 5 cm, 7 cm நீளமுள்ள இரு பக்கங்களுக்கிடையே அமைந்துள்ளது. முக்கோணி *PQR* இல் அது அவ்வாறேயாகும். ஆனால், முக்கோணி *LMN* இல் கோணம் 30° ஆனது அவ்வாறு 5 cm, 7 cm நீளமுள்ள பக்கங்களுக்கிடையே இருக்கவில்லை. முக்கோணி *ABC*ஆனது முக்கோணி *PQR* உடன் ஒருங்கிசைகின்றமைக்கும் *LMN* உடன் ஒருங்கிசையாமைக்கும் காரணம் இதுவேயாகும். முக்கோணி *ABC* யின் இரு பக்கங்களும் அடைகோணமும் முக்கோணி *PQR* இன் இரு பக்கங்களுக்கும் அடைகோணத்திற்கும் சமனாக இருப்பினும் முக்கோணி *LMN* இல் அடை கோணத்திற்கு சமனாக இல்லை. ஆகவே முக்கோணி *ABC* உம் முக்கோணி *LMN* உம் ஒருங்கிசையவில்லை என்பதை அறிந்து கொள்ளலாம்.

குறிப்பு : இங்கு 30° ஆகவுள்ள கோணம் $A\hat{C}B$ ஆனது *AC*, *BC* ஆகிய பக்கங்களின் அடைகோணம் எனப்படும். இவ்வாறே, முக்கோணி *PQR* இல் $R\hat{P}Q$ என்பது *PR*, *PQ* ஆகிய பக்கங்களின் அடைகோணம்.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டினூடாகப் பெற்ற விளைவுகள் வெளிப்படை உண்மைகள் என அழைக்கப்படும்.

ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களும் அடைகோணமும் வேறொரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களுக்கும் அடைகோணத்திற்கும் சமமெனின், அம்முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசையும்.

இவ்வாறு ஒரு முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைவதைக் காட்டுதல் **ப.கோ.ப.** சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைகின்றது எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடப்படும்.

மேலே குறிபிட்ட சந்தர்ப்பத்திற்கேற்பத் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றதெனப் பின்வருமாறு வகை குறிக்கலாம்.

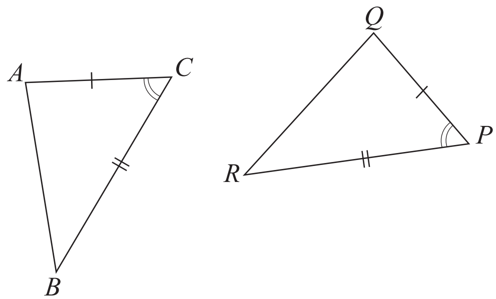
ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகளில்

$AC = PQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{C}B = R\hat{P}Q$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$BC = PR$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore \Delta\ ABC \equiv \Delta\ PQR$ (ப.கோ.ப.)

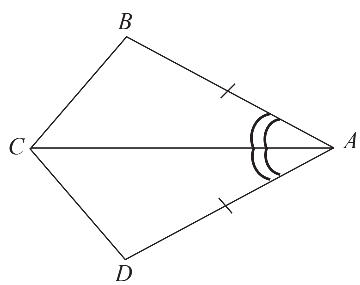


மேற்குறித்த முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றமையால், எஞ்சியுள்ள ஒத்த உறுப்புகளும் சமமாகும்.

அதாவது , சமமென அறியப்பட்ட $A\hat{C}B$, $Q\hat{P}R$ ஆகிய கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள AB, QR ஆகிய பக்கங்களும் சமமாகும். சமமென அறியப்பட்ட AC, PQ ஆகிய பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள ABC, QRP ஆகிய கோணங்களும் சமமாகும். சமமென அறியப்பட்ட BC, PR பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள $C\hat{A}B$, $P\hat{Q}R$ ஆகிய கோணங்களும் சமமாகும்.இப்போது ஓர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1

உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ ADC$ என நிறுவுக. ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளின் மற்றைய ஒத்த உறுப்புக்களைத் தருக.



நிறுவல் :

ABC, ACD ஆகிய முக்கோணிகளில்

$AB = AD$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$B\hat{A}C = C\hat{A}D$ (தரப்பட்டுள்ளது)

AC (பொது)

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (ப.கோ.ப.)

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளில் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்,

$BC = CD$

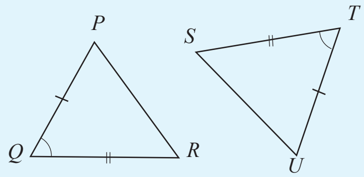
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$

$A\hat{C}B = A\hat{C}D$

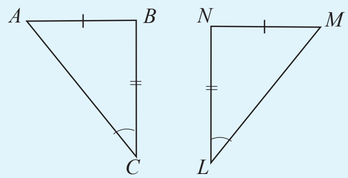
பயிற்சி 5.1

1. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒருங்கிசைவைக் காட்டுவதற்கு ப.கோ.ப சந்தர்ப்பம் பின்வரும் எம்முக்கோணிச் சோடிகளுக்குப் பிரயோகிக்கப்படலாமெனத் துணிக. அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் உரிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைகின்றனவென நிறுவி சமமாகவுள்ள ஏனைய ஒத்த உறுப்புச் சோடிகளையும் எழுதுக.

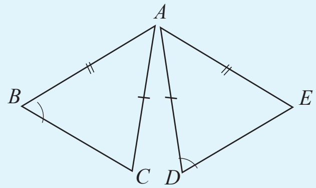
a.



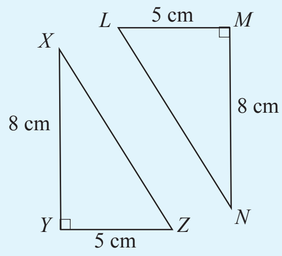
b.



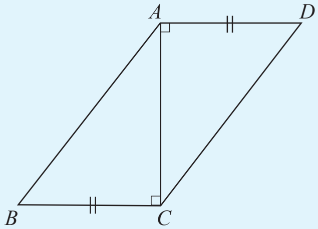
c.



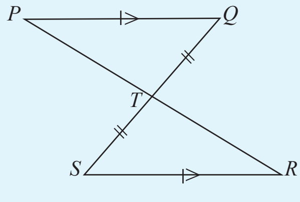
d.



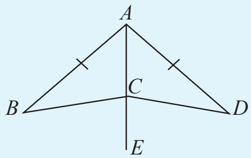
e.



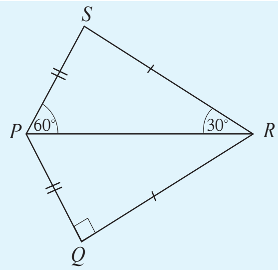
f.



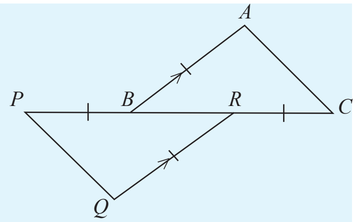
g.



h.



i.



2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்குமுரிய முக்கோணிகளின் பரும்படிப் படங்களை வரைக. அம்முக்கோணிச் சோடிகளுக் கிடையே ஒருங்கிசையும் முக்கோணிச் சோடிகளைத் தெரிந்தெடுத்து, அவற்றின் சமமாகவுள்ள ஏனைய ஒத்த உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) PQR, XYZ ஆகிய முக்கோணிகளில் $PQ = XZ$, $QR = XY$, $P\hat{Q}R = Y\hat{X}Z$.

(ii) ABC , LMN ஆகிய முக்கோணிகளில் $AC = LN$, $BC = LM$, $A\hat{B}C = L\hat{M}N = 50^\circ$.

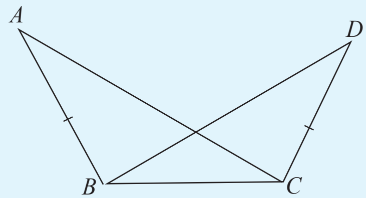
(iii) DEF, STU ஆகிய முக்கோணிகளில் $EF = TU$, $DF = SU$, $E\hat{F}D = T\hat{U}S$.

(iv) ABC , PQR ஆகிய முக்கோணிகளில் $BC = PQ$, $C\hat{B}A = Q\hat{P}R$, $AC = PR$.

3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AB = DC$, $A\hat{B}C = B\hat{C}D$ ஆகும்.

(i) $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, DCB$ எனவும்

(ii) $AC = BD$ எனவும் நிறுவுக.

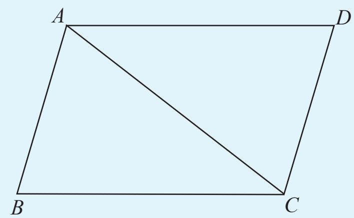


4. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் AD, BC ஆகிய பக்கங்கள் நீளத்தில் சமனானவையும் சமாந்தரமானவையும் ஆகும்.

(i) $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, ADC$ எனவும்

(ii) $AB = DC$ எனவும்

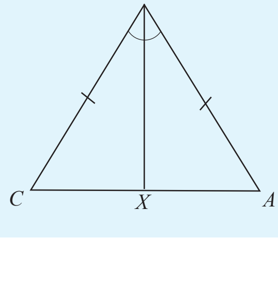
(iii) AB யும் CD யும் சமாந்தரமாகும் எனவும் நிறுவுக.



5. முக்கோணி ABC யில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு

(i) $\Delta\, ABX \equiv \Delta\, CBX$ எனவும்

(ii) $A\hat{X}B = 90^\circ$ எனவும் நிறுவுக.



6. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் AC, BD ஆகிய மூலைவிட்டங்கள் O இல் இருசமகூறிடுகின்றன.
   (i) $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$ எனவும்
   (ii) AD , BC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவை எனவும் நிறுவுக.

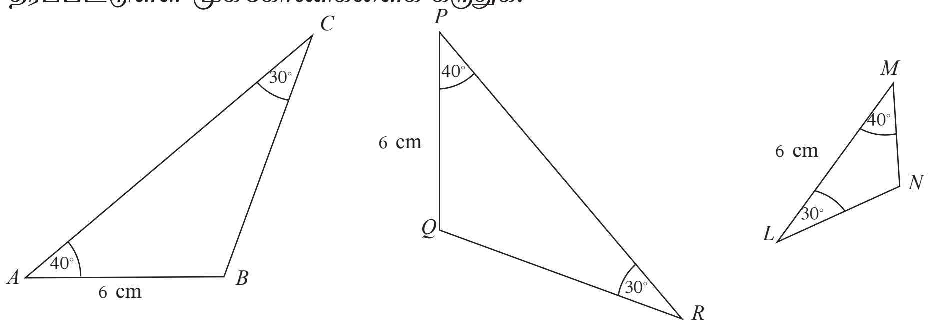
இனி, இரண்டு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைகின்றன என்பதை அறிந்துகொள்ளக்கூடிய இரண்டாவது சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம்.

(b) இரண்டாவது சந்தர்ப்பம்

ஒரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களின் பெறுமானமும் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் வேறொரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களின் பெறுமானத்திற்கும் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்திற்கும் சமமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பம்.

செயற்பாடு

கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணிகளைக் கருதுக.



- முக்கோணி ABC யை ஒரு திசுத் தாளில் பிரதிசெய்து வெட்டிக் கொள்க.
- அதனை PQR, LMN ஆகிய முக்கோணிகளின் மீது வைத்து எம்முக்கோணியுடன் பொருந்துகின்றதாவெனப் பரீட்சிக்க.
- அதற்கேற்ப முக்கோணி ABC உடன் ஒருங்கிசையும் முக்கோணி யாது?

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப முக்கோணி ABC ஆனது முக்கோணி PQR உடன் மாத்திரம் ஒருங்கிசைகின்றது என்பது தெளிவாகும். இச்சந்தர்ப்பத்திலும் மேற்குறித்த சந்தர்ப்பம் (a) இற் போன்று முக்கோணி ABC யிற்குச் சமமான மூன்று உறுப்புகள் மற்றைய இரு முக்கோணிகளிலும் உள்ளன. முக்கோணி ABC ஆனது முக்கோணி PQR உடன் ஒருங்கிசைந்து அது முக்கோணி LMN உடன் ஏன் ஒருங்கிசையவில்லையெனச் சிந்தித்துப் பார்க்க. முக்கோணி ABC யில் தரப்பட்டுள்ள 6 cm நீளமுள்ள பக்கம் தரப்பட்டுள்ள 30° கோணத்திற்கு எதிரே உள்ளது. முக்கோணி PQR இலும் அது அவ்வாறேயாகும். எனினும், முக்கோணி LMN இல் 6 cm நீளமுள்ள பக்கம் 30° கோணத்திற்கு எதிரே இல்லை.

இதற்கேற்ப, முக்கோணி ABC இல் இரண்டு கோணங்கள் முக்கோணி PQR இல் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமனாக உள்ளதுடன் மேலும் முக்கோணி ABC இல் ஒத்த பக்கம் முக்கோணி PQR இல் ஒத்த ஒரு பக்கதிற்கு சமனாக உள்ளது. முக்கோணி LMN இன் ஒத்த பக்கம் சமனாக இல்லை. இதிலிருந்து ABC, LMN ஆகிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையாதவை என்பதை அறிந்து கொள்வோம்.

குறிப்பு: இங்கு ஒத்த பக்கங்கள் எனப்படுபவை சமனாகும் கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களாகும்.

ஒரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களும் ஒரு பக்கமும் வேறோரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களுக்கும் ஒத்த ஒரு பக்கத்திற்கும் சமமெனின், அம் முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசையும்.

இவ்வாறு ஒரு முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைதல் **கோ.கோ.ப.** சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைகின்றது எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடப்படும்.

மேற்குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்கேற்பப் பின்வருமாறு STU, LMN என்னும் முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு காட்டலாம்.

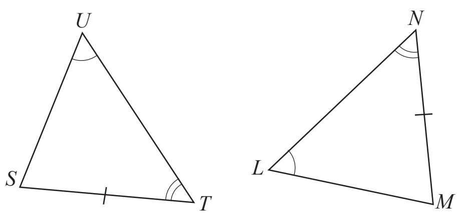
STU, LMN ஆகிய முக்கோணிகளில்

$S\hat{T}U = M\hat{N}L$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$T\hat{U}S = N\hat{L}M$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$ST = MN$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore \quad \Delta\, STU \equiv \Delta\, LMN$ (கோ.கோ.ப.)



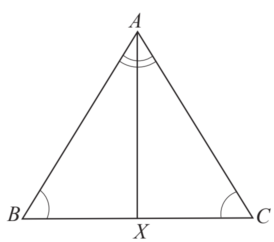
குறிப்பு: மேற்குறித்த இரண்டு முக்கோணிகளில் ST, MN ஆகிய பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள $S\hat{T}U, L\hat{N}M$ ஆகிய கோணங்களும் சமமாகையால் அப்பக்கங்கள் ஒத்த பக்கங்கள் என்பதை அவதானிக்க.

உதாரணம் 1

உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப

(i) $\Delta\, ABX \equiv \Delta\, ACX$ என நிறுவுக.

(ii) மற்றைய ஒத்த உறுப்புகளைத் தருக.



நிறுவல் :

ABX, ACX ஆகிய முக்கோணிகளில்

$A\hat{B}X = A\hat{C}X$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$B\hat{A}X = C\hat{A}X$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AX = AX$ (பொதுப் பக்கம்)

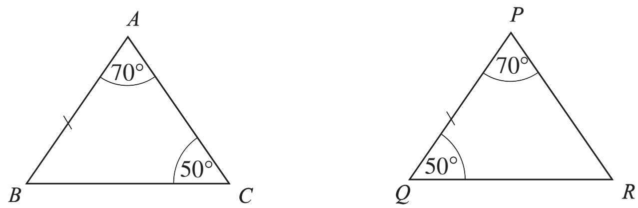
$\Delta\ ABX \equiv \Delta\ ACX$ (கோ.கோ.ப.)

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்

$\therefore BX = CX, A\hat{X}B = A\hat{X}C, AB = AC$

உதாரணம் 2

பின்வரும் முக்கோணிச் சோடி கோ.கோ.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசைகின்ற தாவெனத் துணிக.



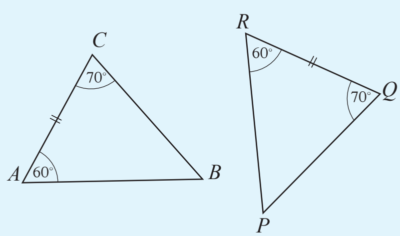
முக்கோணி ABC யின் இரு கோணங்கள் முக்கோணி PQR இன் இரு கோணங்களுக்குச் சமமாக உள்ளன. மேலும், $AB = PQ$ ஆகும். எனினும், அவை ஒத்த பக்கங்களல்ல. அதற்குக் காரணம் அப்பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள ACB, PRQ ஆகிய கோணங்கள் சமமாக இல்லாமையாகும் ($A\hat{C}B = 50^\circ$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $P\hat{R}Q = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$ஆகும்).

ஆகவே, இவ்விரு முக்கோணிகளும் கோ.கோ.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசைகின்றனவெனக் கூறுவதற்குப் போதுமான காரணங்கள் இல்லை.

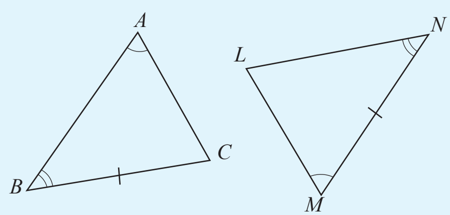
பயிற்சி 5.2

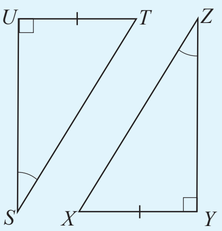
1. பின்வரும் முக்கோணிச் சோடிகளிடையே ஒருங்கிசைவைக் காட்டுவதற்குக் கோ.கோ.ப. சந்தர்ப்பம் எம்முக்கோணிச் சோடிகளுக்குப் பிரயோகிக்கப்படலாம் எனக் குறிப்பிடுக. அம்முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றதெனக் காட்டி, சமமான ஒத்த உறுப்புச் சோடிகளை எழுதுக.

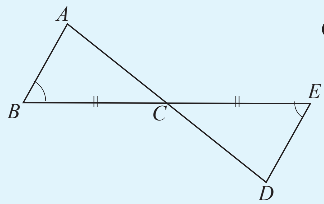
a.

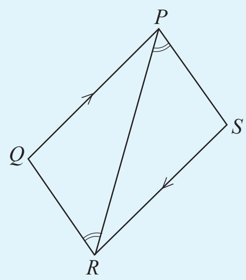


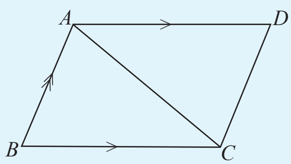
b.

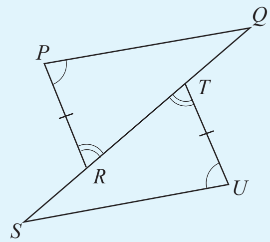


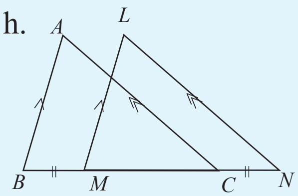
c. 

d. 

e. 

f. 

g. 

h. 

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் உரிய முக்கோணியின் பரும்படி வரிப் படங்களை வரைக. கோ.கோ. ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசையும் முக்கோணிச் சோடியை அவற்றிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து அவற்றின் சமமான எஞ்சியுள்ள ஒத்த உறுப்புகளை எழுதுக.

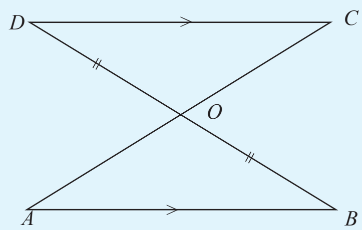
(i) ABC , PQR ஆகிய முக்கோணிகளில் $A\hat{B}C = P\hat{Q}R$, $A\hat{C}B = P\hat{R}Q$, $BC = QR$

(ii) XYZ , LMN ஆகிய முக்கோணிகளில் $X\hat{Y}Z = L\hat{M}N = 90^\circ$, $Y\hat{X}Z = 30^\circ$, $M\hat{N}L = 60^\circ$, $YZ = MN$

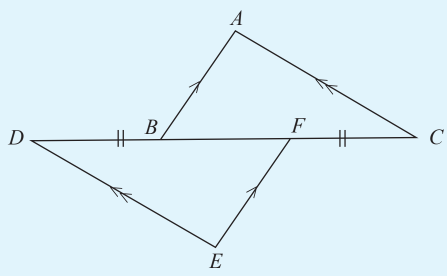
(iii) STU , PQR ஆகிய முக்கோணிகளில் $T\hat{S}U = Q\hat{R}P$, $TU = PR$, $T\hat{U}S = P\hat{Q}R$

(iv) DEF , ABC ஆகிய முக்கோணிகளில் $E\hat{D}F = B\hat{A}C = 40^\circ$, $D\hat{F}E = A\hat{C}B = 60^\circ$, $DE = BA$

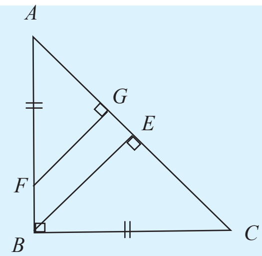
3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் AB, CD ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமாகும். $BO = OD$ ஆகும். $\Delta AOB \equiv \Delta DOC$ எனக் காட்டுக.



4. AB, EF ஆகிய கோடுகளும் AC, DE ஆகிய கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம் ஆகும். $\Delta ABC \equiv \Delta EFD$ எனக் காட்டுக.



5. முக்கோணி ABC யில் $A\hat{B}C = 90^\circ$ ஆகும். உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $\Delta AFG \equiv \Delta BCE$ என நிறுவுக.



6. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$ ஆகும். BD யினால் $A\hat{D}C$ யும் $A\hat{B}C$ யும் இருசமகூறிடப்படுகின்றன. $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ என நிறுவுக.

இரண்டு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவதை அறிந்து கொள்ளக்கூடிய மேலுமொரு சந்தர்ப்பத்தைக் கவனிப்போம்.

(c) **மூன்றாவது சந்தர்ப்பம்**

ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களும் வேறொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் சமமாகும் சந்தர்ப்பம்.

ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களும் இன்னொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் சமமாகும் சந்தர்ப்பம்.

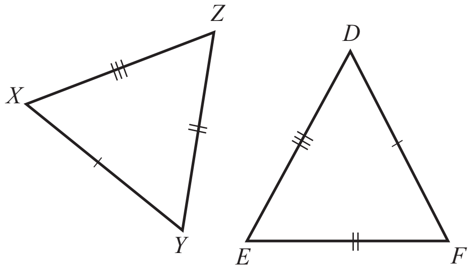
செயற்பாடு

ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களினதும் நீளங்கள் தரப்படும்போது ஓர் ஒத்த முக்கோணியை அமைக்க முடியுமா? அவ்வாறு செய்ய முடியுமா என்பதை அறிவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டைச் செய்க. 5,6,7 சென்ரிமீற்றர் நீளமுள்ள 3 ஈர்க்குத் துண்டுகள் வீதம் எடுத்துக் கொள்க. அவற்றைப் பயன்படுத்திப் பக்கங்களின் நீளங்கள் 5,6,7 சென்ரிமீற்றர் வீதமான இரு முக்கோணிகளை அமைக்க. அவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைய வேண்டும் என்பது உங்களுக்குத் தெரிகின்றதா? ஒரு முக்கோணியில் உள்ள ஈர்க்குத் துண்டுகளின் அமைவுகளை மாற்றிக்கொண்டு மற்றைய முக்கோணியுடன் ஒருங்கிசையாத ஒரு முக்கோணியை உங்களால் அமைக்க முடியுமா? அவ்வாறு செய்ய முடியாதெனக் காண்பீர்கள்.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டினூடாக நீங்கள் பெற்ற இவ்விளைவை வெளிப்படை உண்மை எனக் கேத்திரகணிதத்தில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்கள் வேறொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் சமமெனின், அம்முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசையும். இவ்வாறு ஒரு முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைதலைப் **ப.ப.ப.** சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைதல் எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடப்படும்.

XYZ, DEF என்னும் முக்கோணிச் சோடி மேற்குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்கேற்ப ஒருங்கிசையும் விதத்தைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.



XYZ, *DEF* ஆகிய முக்கோணிகளில்

$XY = DF$ (தரப்பட்டுள்ளது)

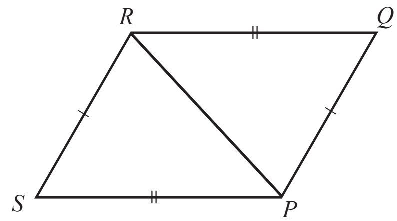
$YZ = EF$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$ZX = DE$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\Delta XYZ \equiv \Delta DEF$ (ப.ப.ப.)

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுககளுக்கேற்ப $\Delta PQR \equiv \Delta PSR$ என நிறுவுக. இவற்றின் மற்றைய ஒத்த உறுப்புகளைத் தருக.



நிறுவல் :

PQR, *PSR* ஆகிய முக்கோணிகளில்

$PQ = RS$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$QR = PS$ (தரப்பட்டுள்ளது)

PR (பொதுப் பக்கம்)

$\therefore \Delta\ PQR \equiv \Delta\ RSP$ (ப.ப.ப.)

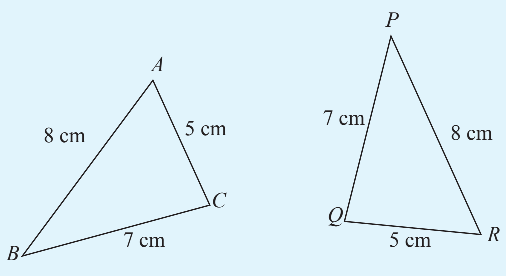
ஒருங்கிசைசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்

$\therefore R\hat{S}P = P\hat{Q}R,\ S\hat{R}P = Q\hat{P}R,\ S\hat{P}R = Q\hat{R}P$ ஆகும்.

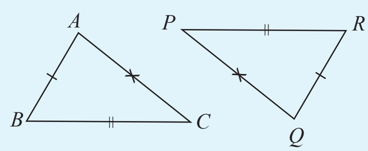
பயற்சி 5.3

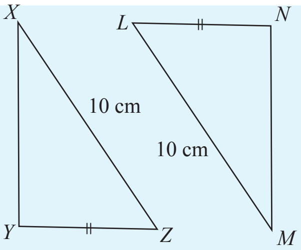
1. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒருங்கிசைவைக் காட்டுவதற்குப் ப.ப.ப. சந்தர்ப்பத்தைப் பின்வரும் எம்முக்கோணிச் சோடிகளுக்குப் பிரயோகிக்கலாமெனத் துணிக. அத்தகைய முக்கோணிச் சோடிகள் ஒருங்கிசைகின்றன என நிறுவி, சமமாகவுள்ள ஒத்த உறுப்புகளையும் எழுதுக.

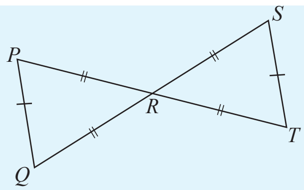
a.

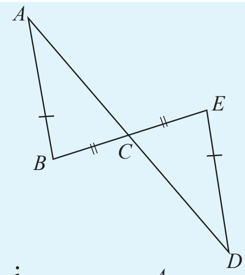


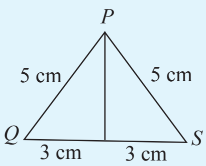
b.

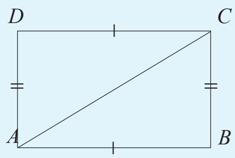


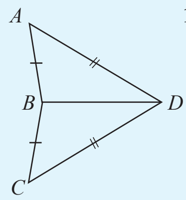
c. 

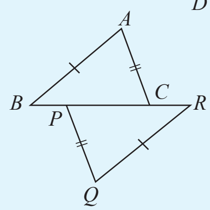
d. 

e. 

f. 

g. 

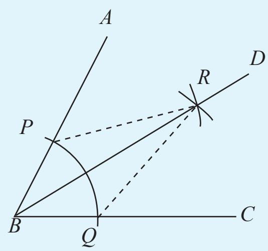
h. 

i. 

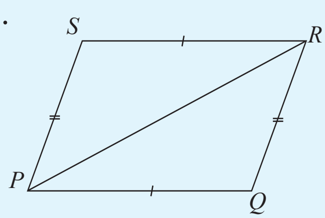
2. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு உரிய முக்கோணியின் பரும்படி வரிப்படத்தை வரைக. ப.ப.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசையும் முக்கோணிச் சோடிகளைத் (இருப்பின்) தெரிந்தெடுத்து அவற்றின் சமமாகவுள்ள எஞ்சியிருக்கும் ஒத்த உறுப்புக்களை எழுதுக.

முக்கோணி PQR இல் $PQ = 4$ cm, $QR = 6$ cm, $RP = 5$ cm
முக்கோணி XYZ இல் $XY = 6$ cm, $YX = 8$ cm, $XY = 10$ cm
முக்கோணி LMN இல் $LM = 5$ cm, $NM = 4$ cm, $NL = 6$ cm
முக்கோணி DEF இல் $DE = 8$ cm, $EF = 10$ cm, $FD = 6$ cm
முக்கோணி ABC இல் $BC = 8$ cm, $CA = 7$ cm, $AB = 9$ cm
முக்கோணி STU இல் $ST = 9$ cm, $TU = 7$ cm, $SU = 5$ cm

3. ஒரு மாணவன் கோணம் ABC யை இருசம கூறிடுவதற்குப் புள்ளி B யை மையமாகத் தெரிந்தெடுத்து, வில் PQ வை வரைகின்றான். அவ்வில் AB, BC ஆகியவற்றை முறையே P யிலும் Q விலும் இடைவெட்டுகின்றான். P, Q ஆகியவற்றிலிருந்து சமமாகவுள்ள இரு விற்கள் R இல் இடைவெட்டுகின்றன. $P\hat{B}R = Q\hat{B}R$ என நிறுவுக.



4. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் எதிர்ப் பக்கங்கள் நீளத்தில் சமம்.
(i) $\Delta PSR \equiv \Delta PQR$ எனவும்
(ii) $P\hat{S}R = P\hat{Q}R$ எனவும்
(iii) எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை எனவும்
நிறுவுக.



5. ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் ஓர் உச்சியிலிருந்து எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப் புள்ளிக்கு வரையப்பட்டுள்ள கோடு அப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக.

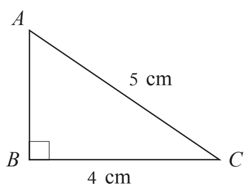
ஒரு செங்கோண முக்கோணச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றது. என்பதை அறிந்துகொள்ளக் கூடிய விசேட சந்தர்ப்பமொன்றைக் கருதுவோம்.

(*d*) நான்காவது சந்தர்ப்பம்

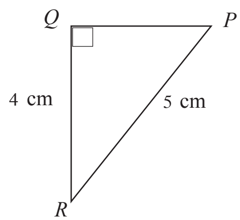
ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கமும் ஒரு பக்கமும் இன்னொரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்திற்கும் இன்னொரு பக்கத்திற்கும் சமனாகும் சந்தர்ப்பம்.

செயற்பாடு

செம்பக்கத்தின் நீளம் 5 cm ஆகவும் வேறொரு பக்கத்தின் நீளம் 4 cm ஆகவும் இருக்குமாறு வரையப்படும் செங்கோண முக்கோணிச் சோடி ஒன்று கீழே காணப்படுகின்றது.



உரு (i)

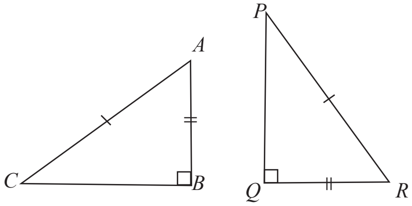


உரு (ii)

உரு (i) இனால் வகைகுறிக்கப்படும் முக்கோணியை ஒரு திசுத் தாளில் பிரதிசெய்து அதனை உரு (ii) இனால் வகைகுறிக்கப்படும் முக்கோணியுடன் பொருந்துகின்றதாவெனப் பரீட்சிக்க. அம்முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவானவை என்பதை விளங்கிக்கொள்வீர்கள். இதற்கேற்பச் செங்கோண முக்கோணிச் சோடி ஒன்றின் சமமாகவுள்ள இரு உறுப்புகளைக் கொண்டு ஒருங்கிசைவைப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கமும் ஒரு பக்கமும் முறையே வேறொரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்திற்கும் ஒரு பக்கத்திற்கும் நீளத்தில் சமமெனின், அவ்விரு செங்கோண முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையும். இவ்வாறு செங்கோண முக்கோணிச்சோடி ஒன்று ஒருங்கிசைதல் **செ.ப.ப.** சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைதல் எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடப்படும்.

பின்வரும் இரு முக்கோணிகளும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப அவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையுமென நிறுவுவோம்.



ABC, PQR ஆகிய செங்கோண முக்கோணிகளில்

$AC = PR$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AB = QR$ (தரப்பட்டுள்ளது)

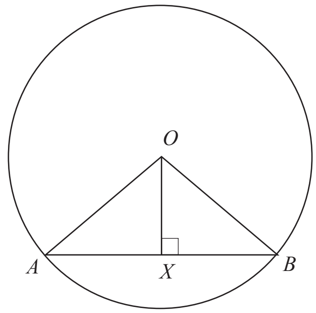
$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta PQR$ (செ.ப.ப.)

மேற்குறித்த முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றமையால் எஞ்சியுள்ள ஒத்த உறுப்புகளும் சமம். அதாவது,

$BC = PQ, B\hat{A}C = P\hat{R}Q, A\hat{C}B = Q\hat{P}R$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

உருவில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $\Delta\, OXA \equiv \Delta\, OXB$ என நிறுவுக. இவற்றின் மற்றைய ஒத்த உறுப்புகளைத் தருக.



நிறுவல்

$OXA,\ OXB$ ஆகிய செங்கோண முக்கோணிகளில்

$OA = OB$ (வட்டத்தின் ஆரை)

OX (பொதுப் பக்கம்)

$\Delta OXA = \Delta\, OXB$ (செ.ப.ப.)

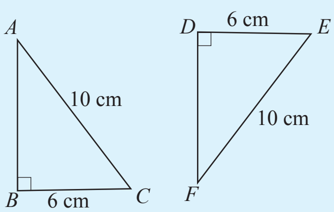
ஒருங்கிசையும் முகோணியின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்

$\therefore\ O\hat{A}X = O\hat{B}X,\ AX = BX,\ A\hat{O}X = B\hat{O}X$

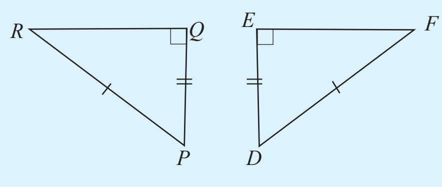
5.4 பயிற்சி

1 தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒருங்கிசைதலைக் காட்டுவதற்குச் செ.ப.ப. சந்தர்ப்பம் பின்வரும் எந்த முக்கோணிச் சோடிகளுக்குப் பிரயோகிக்கப்படலாமெனத் துணிக. அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் உரிய முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றதென நிறுவி, சமமாக உள்ள எஞ்சிய உறுப்புகளை எழுதுக.

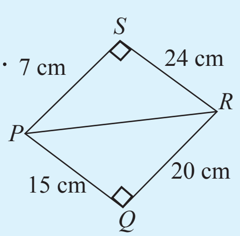
a.



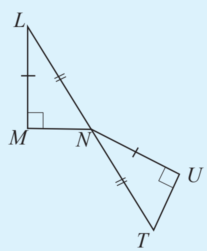
b.



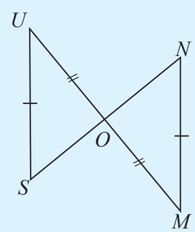
c.

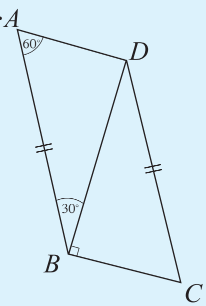


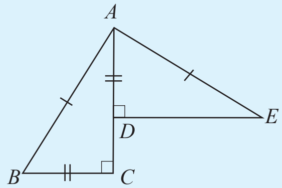
d.

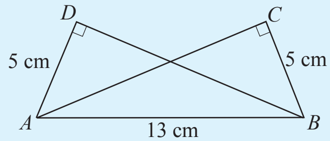


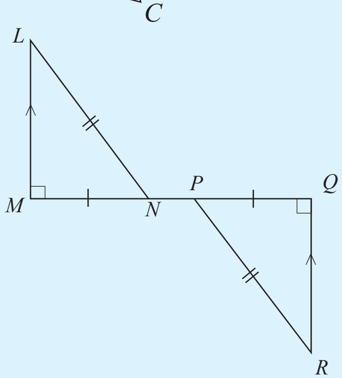
e.

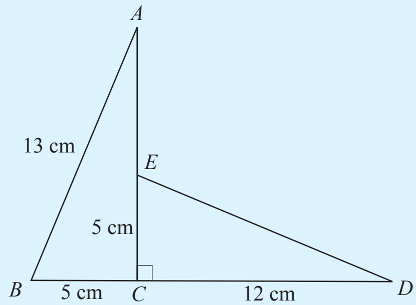


f. 

g. 

h. 

i. 

j. 

2. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய முக்கோணிகளின் பரும்படிப் படங்களை வரைக. செ.ப.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசையும் முக்கோணிச் சோடிகளை (இருப்பின்) அதிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து அவற்றில் சமமாக உள்ள எஞ்சிய ஒத்த உறுப்புக்களை எழுதுக.

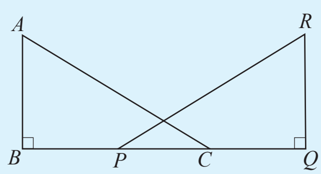
(i) ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகளில் $A\hat{B}C = P\hat{Q}R = 90^\circ$, $AC = PR = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $QP = 4$ cm

(ii) LMN, XYZ ஆகிய முக்கோணிகளில் $L\hat{M}N = X\hat{Y}Z = 90^\circ$, $LM = XY$, $MN = YZ$

(iii) DEF PQR ஆகிய முக்கோணிகளில்
$D\hat{E}F = P\hat{Q}R = 90^\circ$, $DF = PR$, $EF = PQ$

(iv) ABD, ABC ஆகிய முக்கோணிகளில் $A\hat{D}B = A\hat{C}B = 90^\circ$, $AD = CB$

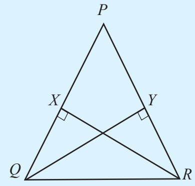
3. உருவில் $AC = PR$, $AB = RQ$, எனின், $BP = CQ$ எனக் காட்டுக



4. முக்கோணி PQR இல் Q, R ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து முறையே RP, QP ஆகியவற்றிற்கு $QY = RX$ ஆக இருக்குமாறு QY, RX என்னும் செங்குத்துக்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.

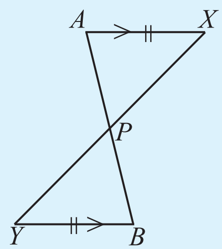
(i) $\Delta XQR \equiv \Delta YRQ$ எனவும்

(ii) $X\hat{R}Q = Y\hat{Q}R$ எனவும் நிறுவுக

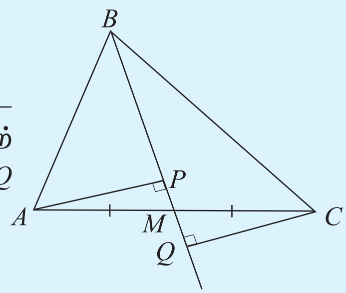


பலவினப் பயிற்சி

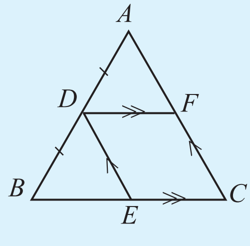
1. உருவில் $AX//YB$, $AX = YB$ ஆகும். AB, YX ஆகிய கோடுகள் P இல் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுகின்றன எனக் காட்டுக.



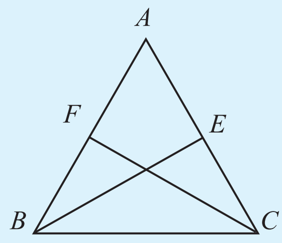
2. முக்கோணி ABC இல் B இனூடாக வரையப்பட்ட இடையத்துக்கு (நீட்டப்பட்ட) A, C ஆகியவற்றிலிருந்து வரைந்த செங்குத்துகளின் அடிகள் P, Q ஆகும். $\Delta AMP \equiv \Delta MQC$ எனக் காட்டுக.



3. தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள தரவுகளுக்கமைய $\Delta ADF \equiv \Delta DBE$ எனக் காட்டுக

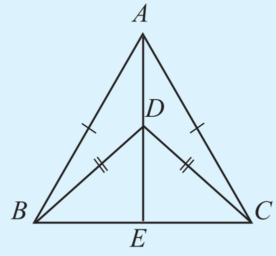


4. உருவில் முக்கோணி ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். AC, BA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே E , F ஆகும்.



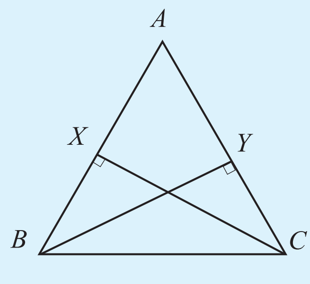
(i) AB , FC என்பன செங்குத்தானவை எனவும்
(ii) AC , BE என்பன செங்குத்தானவை எனவும்
(iii) $CF = BE$ எனவும் காட்டுக.

5. உருவில் முக்கோணி ABC இல் $AB = AC$ ஆகும். $BD = DC$ ஆகுமாறு, கோடு AD ஆனது பக்கம் BC ஐ E இல் சந்திக்கின்றது.



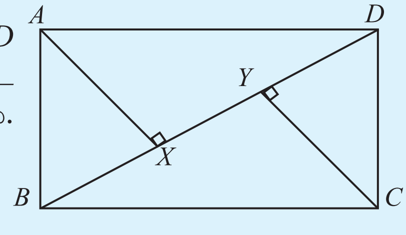
(i) $\Delta ABD \equiv \Delta CAD$ எனவும்
(ii) $\Delta BAE \equiv \Delta CAE$ எனவும்
(iii) AE , BC என்பவை செங்குத்தானவை எனவும் நிறுவுக.

6. தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் B , C ஆகிய உச்சிகளிலிருந்து AC , AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் முறையே BY , CX ஆகும். $BY = CX$ ஆயின்,



(i) $AB = AC$ எனவும்
(ii) $X\hat{B}C = Y\hat{C}B$ எனவும்
காட்டுக.

7. செவ்வகம் $ABCD$ இல் மூலைவிட்டம் BD இற்கு A , C ஆகியவற்றிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே X , Y ஆகும்.



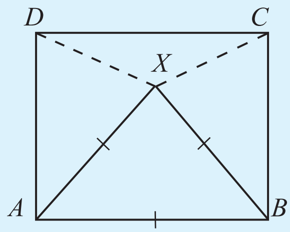
(i) $\Delta AXD \equiv \Delta BCY$ எனவும்
(ii) $AX = YC$ எனவும்
(iii) $BX = YD$ எனவும்
(iv) $\Delta YDC \equiv \Delta ABX$ எனவும்
காட்டுக.

8. சதுரம் $ABCD$ இன் உள்ளே XAB ஒரு சமபக்க முக்கோணி ஆகுமாறு புள்ளி X அமைந்துள்ளது.

(i) $\Delta AXD \equiv \Delta CBX$ எனவும்

(ii) DXC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி எனவும்

காட்டுக.



9. செவ்வகம் $ABCD$ யில் BC , DC ஆகிய பக்கங்களின் மீது செவ்வகத்திற்கு வெளியே BCF , DCE ஆகிய சமபக்க முக்கோணிகள் வரையப்பட்டுள்ளன.

(i) மேற்குறித்த தரவுகளைக் காட்டும் பருமட்டான உருவமொன்றை வரைக.

(ii) $\Delta EDA \equiv \Delta ABF$ எனவும்

(iii) EAF ஒரு சமபக்க முக்கோணி எனவும் காட்டுக.

10. முக்கோணி ABC இல் பக்கம் BC இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி AE ஆகும். AE இன் மீது புள்ளி D அமைந்துள்ளது.

(i) $\Delta ABE \equiv \Delta AEC$ எனவும்

(ii) $\Delta BDE \equiv \Delta DEC$ எனவும்

(iii) $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ எனவும்

நிறுவுக.

11. $ABCDE$ என்பது ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணியாகும்.

(i) $\Delta ABC \equiv \Delta AED$ எனக் காட்டுக.

(ii) A இலிருந்து CD இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி X ஆயின் $CX = XD$ எனக் காட்டுக.

6 பரப்பளவு

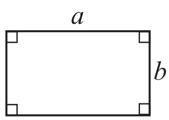
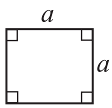
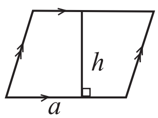
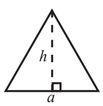
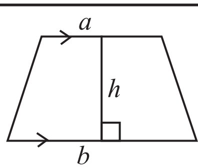
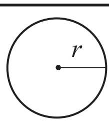
இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கும்
- ஆரைச்சிறை உள்ள கூட்டுத்தள உருவங்களின் பரப்பளவுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

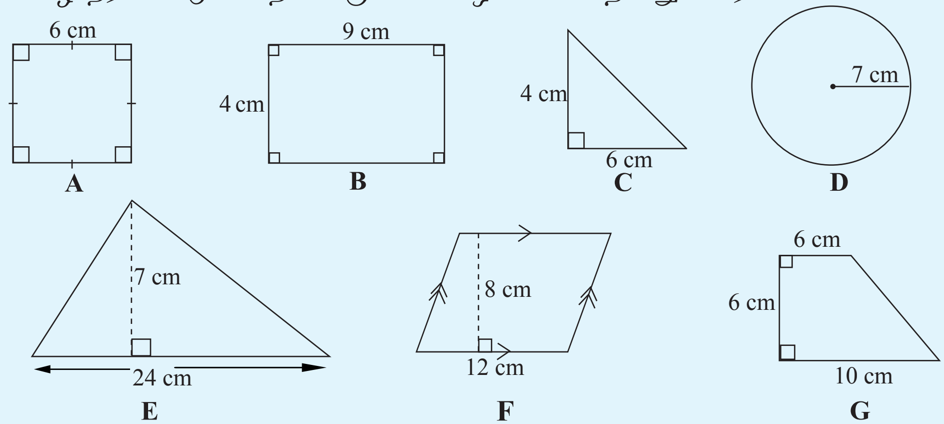
தள உருக்களின் பரப்பளவு

பரப்பளவின் கீழ் நீங்கள் முன்னர் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வோம்.

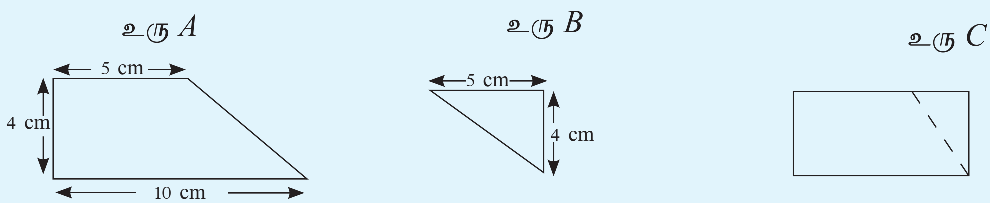
பெயர்	தள உருவம்	பரப்பளவு கணிக்கப்படும் விதம்	பரப்பளவு (A) இற்கான சூத்திரம்
செவ்வகம்		நீளம் × அகலம்	$A = a \times b$
சதுரம்		(பக்கத்தின் நீளம்)2	$A = a^2$
இணைகரம்		அடி × செங்குத்து உயரம்	$A = a \times h$
முக்கோணி		$\frac{1}{2}$ ×அடி × செங்குத்து உயரம்	$A = \frac{1}{2} \times a \times h$
சரிவகம்		$\frac{1}{2}$ × இரு சமாந்தர பக்கங்களின் நீளங்களின் கூட்டுத்தொகை × செங்குத்து உயரம்	$A = \frac{1}{2}(a+b) \times h$
வட்டம்		π × (ஆரை) ^{2}	$A = \pi r^2$

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தள உருவங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பரப்பளவைக் காண்க.



2. கீழே தரப்பட்டுள்ள (A), (B) ஆகிய உருக்களில் காணப்படும் சரிவகத்தையும் முக்கோணியையும் இணைத்து உரு (C) யில் உள்ள செவ்வகம் உருவாக்கப் பட்டுள்ளது.

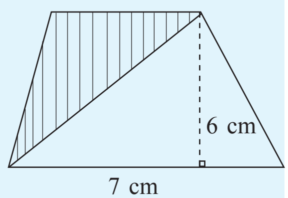


(i) உரு A யில் உள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) உரு B யில் உள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) உரு C யில் உள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவை உரு (A) , உரு (B) ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

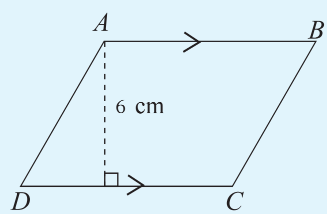
3. இரு முக்கோணிகளை இணைத்து அமைத்த 33 cm^2 பரப்பளவுள்ள ஒரு சரிவகம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதில் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க.



4. உருவில் 120 cm^2 பரப்பளவுள்ள ஓர் இணைகரம் உள்ளது. அதன் சுற்றளவு 64 cm ஆகும். தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைக் கொண்டு அதன்

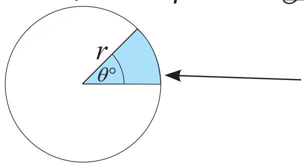
(i) பக்கம் CD யின் நீளத்தைக் காண்க.

(ii) பக்கம் BC யின் நீளத்தைக் காண்க.



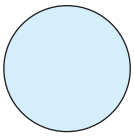
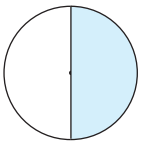
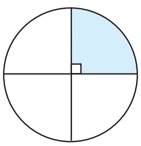
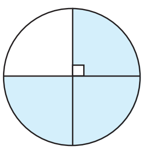
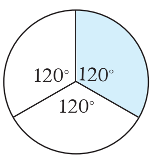
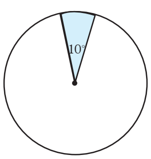
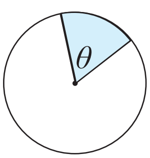
6.1 ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு

சுற்றளவு என்னும் அலகில் ஆரைச்சிறையின் சுற்றளவைக் காணல் பற்றிக் கற்றோம். இவ்வலகில் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு எவ்வாறு காணல் என்பது பற்றிக் கற்போம்.

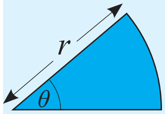


ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு

கீழேயுள்ள அட்டவணையின் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு எவ்வாறு காணப்பட வேண்டும் என்பது விளக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆரைச்சிறை	நிழற்றப்பட்டுள்ள ஆரைச்சிறை வட்டத்தின் என்ன பின்னம்	ஆரைச்சிறைகளின் பரப்பளவு
	1	πr^2
	$\frac{1}{2}$	$\pi r^2 \times \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\pi r^2 \times \frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\pi r^2 \times \frac{3}{4}$
	$\frac{1}{3}$	$\pi r^2 \times \frac{1}{3}$
	$\frac{10}{360}$	$\pi r^2 \times \frac{10}{360}$
	$\frac{\theta}{360}$	$\pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$

மேலேயுள்ள அட்டவணைக்கேற்ப,

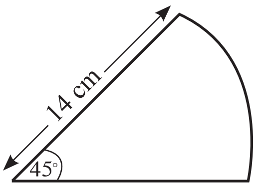


ஆரை r உம் மையக்கோணம் θ° உம் உடைய ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $\pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$ ஆகும்.

இவ்வலகில் π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

உதாரணம் 1

பின்வரும் உருவில் காணப்படும் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவைக் காண்க.



$$\text{பரப்பளவு} = \pi r^2 \times \frac{45}{360}$$

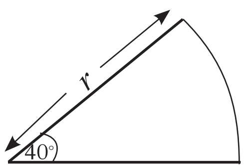
$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times \frac{45}{360}$$

$$= 77$$

$\therefore$ பரப்பளவு 77 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

உருவில் உள்ள ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $17\frac{1}{9}$ cm^2 எனின், அதன் ஆரையைக் காண்க.



$$\text{பரப்பளவு} = \pi r^2 \times \frac{40}{360}$$

$$17\frac{1}{9} = \frac{22}{7} \times r^2 \times \frac{1}{9}$$

$$\frac{154}{9} = \frac{22}{7} \times r^2 \times \frac{1}{9}$$

$$r^2 = \frac{154 \times 7}{22}$$

$$r^2 = 49$$

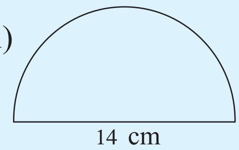
$$\therefore \quad r = 7$$

$\therefore$ ஆரை 7 cm ஆகும்.

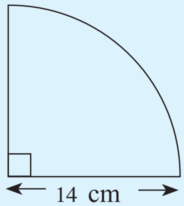
பயிற்சி 6.1

1. ஆரைச்சிறைகள் சில கீழே காணப்படுகின்றன. ஒவ்வோர் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவையும் காண்க.

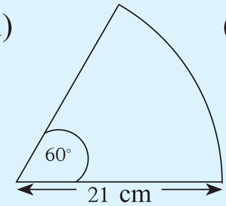
(i)



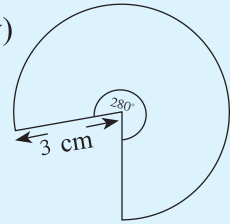
(ii)



(iii)

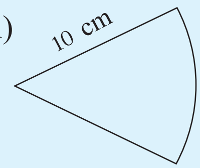


(iv)

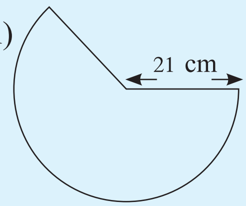


2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஆரைச்சிறைகளின் பரப்பளவுகள் முறையே 77 cm^2, 462 cm^2 ஆகும். இந்த ஆரைச்சிறைகளின் மையக் கோணங்களைக் காண்க.

(i)

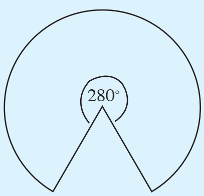


(ii)

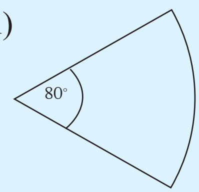


3. பின்வரும் ஆரைச்சிறைகளின் பரப்பளவுகள் முறையே 792 cm^2, $6\frac{2}{7}$ cm^2 ஆகும். அந்த ஆரைச்சிறைகள் பெறப்பட்டுள்ள வட்டங்களின் ஆரையைக் காண்க.

(i)



(ii)



6.1 ஆரைச்சிறை இடம்பெறும் கூட்டுத்தள உருவங்கள்

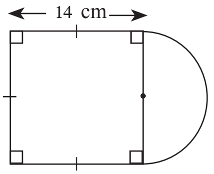
ஆரைச்சிறைகளுடன் செவ்வகம், முக்கோணி போன்ற எளிய தள உருவங்கள் இணைவதனால் உண்டாகும் கூட்டுத்தள உருவங்களின் பரப்பளவுகள் பற்றி பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

ஒரு சதுரமும் ஓர் அரைவட்டமும் இணைந்து அமைந்த கூட்டுத்தள உருவம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதன் பரப்பளவைக் காண்க

சதுரத்தின் பரப்பளவு $= 14 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} = 196 \text{ cm}^2$

அரை வட்டத்தின் ஆரை $= 14 \div 2 = 7$



அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times \pi r^2$

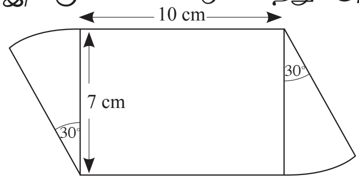
$= \frac{1}{\not{2}_1} \times \frac{\not{22}^{11}}{\not{7}_1} \times 7 \times 7 = 77 \text{cm}^2$

∴ கூட்டு உருவத்தின் பரப்பளவு $= 196 + 77$

$= 273 \text{ cm}^2$

உதாரணம் 2

ஒரு செவ்வகத்தையும் இரு ஆரைச்சிறைகளையும் இணைத்து அமைத்த தள உருவம் இங்கு காணப்படுகின்றது. அதன் பரப்பளவைக் காண்க.



செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $= 10 \times 7$

$= 70 \text{cm}^2$

ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $= \frac{30}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

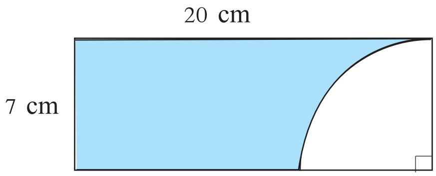
$= \frac{77}{6} \text{cm}^2$

இரண்டு ஆரைச்சிறைகளினதும் பரப்பளவு $= \frac{77}{6} \times 2 = \frac{77}{3} = 25\frac{2}{3} \text{cm}^2$

கூட்டுத் தள உருவத்தின் பரப்பளவு $= 70 \text{cm}^2 + 25\frac{2}{3} \text{cm}^2$

$= 95\frac{2}{3} \text{cm}^2$

உதாரணம் 3



செவ்வக வடிவத் தகட்டொன்றிலிருந்து உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கால் வட்டப் பகுதியொன்று வெட்டி அகற்றப்பட்டுள்ளது. நிழற்றிய பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

செவ்வகத் தகட்டின் பரப்பளவு $= 20 \times 7$

$= 140 \text{ cm}^2$

கால் வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு $= \pi r^2 \times \frac{90}{360}$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times \frac{90}{360}$

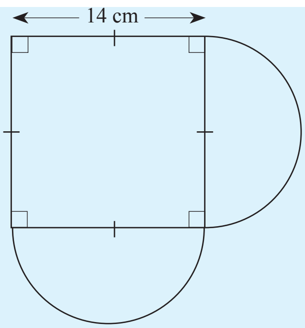
$= 38.5 \text{ cm}^2$

ஆகவே நிழற்றிய பகுதியின் பரப்பளவு $= 140 - 38.5$

$= 101.5 \text{ cm}^2$

பயிற்சி 6.2

1. ஒரு சதுரத்துடன் இரு அரைவட்டப் பகுதிகளை இணைத்துப் பெறப்பட்ட கூட்டுத்தள உருவம் இங்கு காணப்படுகின்றது.



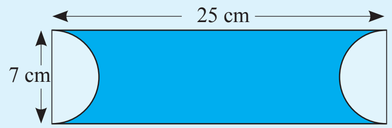
(i) ஓர் அரை வட்டப் பகுதியின் ஆரையைக் காண்க.

(ii) இரு அரை வட்டப் பகுதிகளினதும் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) சதுரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iv) உருவத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

2. ஒரு செவ்வகக் கடதாசியிலிருந்து இரு அரைவட்டப் பகுதிகளை அகற்றுவதன் மூலம் நிழற்றப்பட்ட பகுதி பெறப் பட்டுள்ளது.

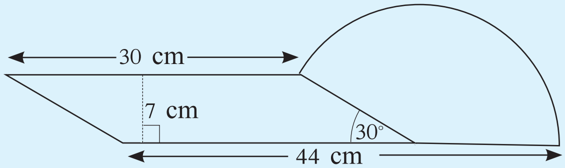


(i) செவ்வகப் பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) இரு அரைவட்டப் பகுதிகளின் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

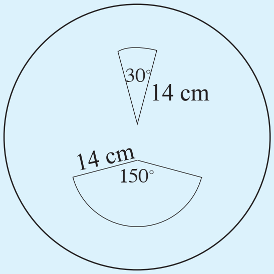
(iii) நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

3. ஓர் இணைகரத்தையும் ஓர் ஆரைச் சிறையையும் இணைத்து அமைத்த ஒரு கூட்டுத்தள உருவம் இங்கு காணப்படுகின்றது.

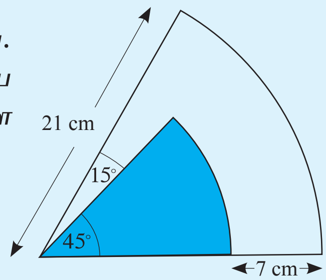


(i) இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.
(ii) ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவைக் காண்க.
(iii) கூட்டு உருவத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

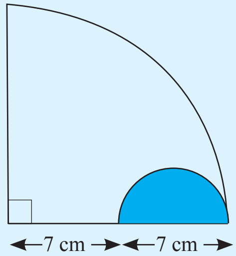
4. உருவில் 28 cm ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் உள்ளது. உருவில் காணப்படும் இரு ஆரைச்சிறைகளை வெட்டி அகற்றுவதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துண்டங்களை வெட்டி அகற்றிய பின்னர் எஞ்சியிருக்கும் பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



5. உருவில் இரு ஆரைச்சிறைகள் உள்ள உருவம் உள்ளது. சிறிய ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவுக்கும் பெரிய ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவுக்குமிடையே உள்ள விகிதம் 1 : 3 எனக் காட்டுக.



6. உருவில் உள்ள அளவீடுகளுக்கேற்ப நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவு நிழற்றப்படாத பகுதியின் பரப்பளவின் ஏழு மடங்கெனக் காட்டுக.

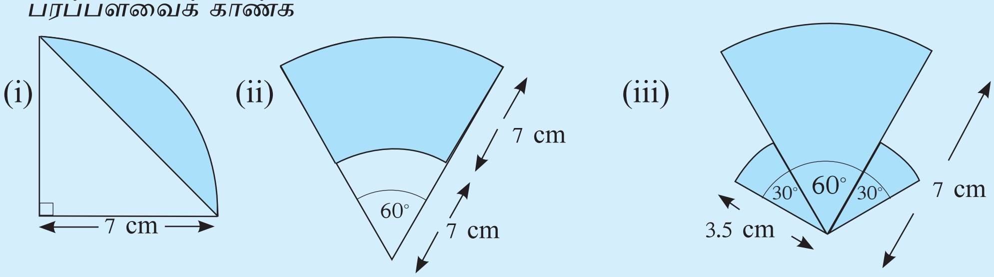


பொழிப்பு

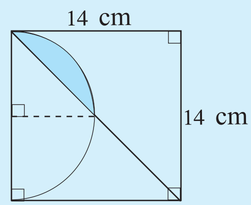
ஆரை r ஐயும் மையக் கோணம் θ வையும் உடைய ஓர் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $\pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$ ஆகும்.

பலவினப் பயிற்சி

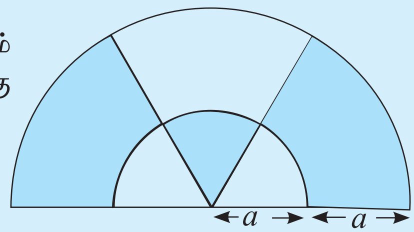
1. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க



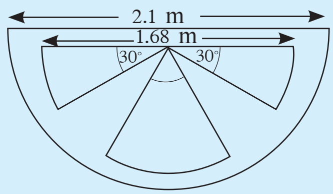
2. நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க



3. நிழற்றப்படாத பகுதியின் பரப்பளவுக்கும் நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவுக்கு மிடையே உள்ள விகிதம் 5:7 எனக் காட்டுக.



4. ஒரு ஞாபகார்த்தப் பொறிக்கல்லிற்கு முன்னால் தரையில் செய்யப்பட்டுள்ள ஒரு நிர்மாணிப்பின் பரும்படிப் படம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதில் வட்டப் பகுதியில் உள்ள மூன்று ஆரைச்சிறைப் பகுதிகளில் புற்கள் வளர்க்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை எஞ்சிய பகுதியில் வெண்மணல் பரப்பப்பட்டுள்ளது. ஆரைச்சிறையின் ஆரை 84 cm ஆகும்.



(i) அரை வட்டப் பகுதியின் ஆரை எத்தனை cm எனக் காண்க.

(ii) அரை வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவை cm^2 இல் காண்க.

(iii) மையக் கோணம் 30° ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறைப் பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iv) பெரிய ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு இரு சிறிய ஆரைச்சிறைகளினதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகையிலும் பார்க்க 1848 cm^2 இனால் கூடியதெனின், அதன் மையக் கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7 இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஒரு மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையின் காரணிகளைக் காண்பதற்கும்
- ஒரு வர்க்க வித்தியாசக் கோவையின் காரணிகளைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

$2x + 6$ ஆனது ஓர் ஈருறுப்பு அட்சரகணிதக் கோவை என்பதை நாம் அறிவோம். அதனை $2(x + 3)$ எனக் காட்டலாம். ஆகையால் 2, $x + 3$ ஆகியன அதன் காரணிகள் என்பதையும் நாம் அறிவோம்.

இதற்கேற்ப $4x^2 + 6x = 2x(2x + 3)$ ஆகையால், $4x^2 + 6x$ இன் இரண்டு காரணிகள் $2x$, $(2x + 3)$ ஆகும்.
$a^2 - 2a + ab - 2b$ யின் காரணிகளைக் காண்போம்.

$$a^2 - 2a + ab - 2b = a(a - 2) + b(a - 2)$$
$$= (a - 2)(a + b)$$

எனவே, $a^2 - 2a + ab - 2b$ இன் காரணிகள் $a - 2$, $a + b$ ஆகும்.

இதற்கு முன்னர் கற்ற மேலே காட்டப்பட்ட காரணிகளை வேறுபடுத்துவதற்கான சந்தர்ப்பங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றினதும் காரணிகளை வேறுபடுத்துக.

I. a. $3x + 12$ **b.** $p^2 - p$ **c.** $x^2 + 3xy$

d. $2a - 4a^2$ **e.** $p^2q - pq$ **f.** $2pq - 4p^2q$

g. $3m^2n + n^2$ **h.** $2a^2 - 4ab$ **i.** $2a^2 - 8ab - 2b^2$

j. $5x^2 - 10x^2y^2 - 15x^2\ y$ **k.** $3x^2y - 6x^2y^2 + 6xy^2$ **l.** $a^2bc + ab^2c - abc^2$

II. **a.** $x(a+b)+y(a+b)$

b. $2a(3x+y)-b(3x+y)$

c. $p(2a-3b)+q(2a-3b)$

d. $2(x-3)-xy+3y$

e. $3b+3+a(b+1)$

f. $x^2-xy+4x-4y$

g. $a^2-2ab-5a+10b$

h. $m-3mn-n+3n^2$

2. கீழே (a) இலும் (b) இலும் உள்ள வெற்றிடங்களைப் பூரணப்படுத்தி, அதற்கேற்ப கீழே தரப்பட்டுள்ள கோவைகளின் காரணிகளை வேறுபடுத்துக.

(I) $a\,(2x-y)+b\,(y-2x)$
$= a\,(2x-y)-b\,(........)$
$= (........)\,(........)$

(II) $p\,(a-b)-q\,(b-a)$
$= p\,(a-b)\ ....\ q\,(a-b)$
$= (a-b)\,(........)$

(III)

a. $x\,(2p-q)-y\,(q-2p)$

b. $3x\,(2a-b)+2y\,(b-2a)$

c. $m\,(l-2n)-p\,(2n-l)$

d. $k\,(2x+y)-l\,(y+2x)$

e. $a\,(x+3y)-b\,(-x-3y)$

f. $b\,(m-2n)+d\,(2n-m)$

மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகள்

இப்போது நாம் மூவுறுப்புக் கோவை x^2+2x-3 ஐ அவதானிப்போம். இக்கோவை ax^2+bx+c என்னும் வடிவத்தில் உள்ளது, இங்கு a, b, c ஆகியன பூச்சியமல்லாத எண்கள். ax^2+bx+c என்னும் வடிவிலுள்ள கோவை x இலான மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவை எனப்படும். இங்கு a ஆனது x^2 இன் குணகம் எனவும் b ஆனது x இன் குணகம் எனவும் c ஆனது மாறா உறுப்பு எனவும் அழைக்கப்படும்.

ஒரு மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையின் உறுப்புகளை இதே ஒழுங்கில் எழுதும்போது அதன் காரணிகளைக் காணல் எளிதாகும். x^2+2x-3 இல் x^2 இன் குணகம் 1 உம் x இன் குணகம் 2 உம் மாறா உறுப்பு -3 ஆகும். $4+2x-x^2$ என்னும் கோவையும் ஒரு மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையாகும். இக்கோவையை $-x^2+2x+4$ எனவும் எழுதலாம். $x^2+2xy-y^2$ என்னும் மூவுறுப்புக் கோவையானது ஓர் இருபடிக் கோவையா? இதனை x இன் ஒரு மூவுறுப்புக் கோவையாக அல்லது y இன் ஒரு மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையாகக் கருதலாம். y யின் இருபடிக் கோவையாகக் கருதும்போது அதனை $-y^2+2xy+x^2$ என எழுதுவது இலகுவானதாகும்.

உதாரணமாக $3x^2-2x-5$, a^2+2a+8, y^2+2y-5, $5-2x-3x^2$ ஆகியன மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகளாகும். $a+2x+3$, $2p^3+3p^2-5p$ என்னும் கோவைகள் மூவுறுப்பு கோவைகள் ஆனால் இருபடிக் கோவைகள் அல்ல.

7.1 மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள்

$(x+2)$, $(x+3)$ என்னும் ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தைப் பெற்ற விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= x(x+3)+2(x+3)\\ &= x^2+\underbrace{3x+2x}+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

$(x+2)$, $(x+3)$ ஆகியவற்றின் பெருக்கமாக x^2+5x+6 கிடைக்கின்றமையால் x^2+5x+6 இன் காரணிகள் $(x+2)$, $(x+3)$ ஆகும்.

x^2+5x+6 ஆனது ஒரு மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையாகும். அதன் காரணிகளாக $(x+2)$, $(x+3)$ ஆகியவற்றை எங்ஙனம் வேறுபடுத்தலாம். மேற்குறித்த இரு ஈருறுப்பு கோவைகளினதும் பெருக்கத்தைப் பெறுவதற்குப் பயன்படுத்திய படிமுறைகளை இறுதியிலிருந்து தொடக்கம் வரை பரீட்சித்துப் பார்ப்போம்.

- x^2+5x+6 என்னும் வடிவத்தில் உள்ள மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையில் நடு உறுப்பு $5x$ ஆனது இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக அதாவது $3x+2x$ ஆகக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

- $3x$, $2x$ ஆகிய உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= 3x \times 2x = 6x^2$

- மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவை x^2+5x+6 இன் முதல் உறுப்பினதும் இறுதி உறுப்பினதும் பெருக்கம் $x^2 \times 6 = 6x^2$

மேற்குறித்த அவதானிப்புகளுக்கேற்ப நாம் பின்வரும் முடிவுகளுக்கு வரலாம். நடு உறுப்பை இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதுதல் வேண்டும். அவ்விரு உறுப்புகளினதும் பெருக்கம் மூவுறுப்புக் கோவையின் முதல் உறுப்பு, கடைசி உறுப்பு ஆகிய இரு உறுப்புகளினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். உதாரணமாக $x^2+7x+10$ இன் காரணிகளை வேறுபடுத்துவோம். இங்கு நடு உறுப்பு $7x$ ஆகும். அதனை இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதுதல் வேண்டும். அவ்வாறே அவ்விரு உறுப்புகளினதும் பெருக்கம் $10x^2$ ஆகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

முதல் உறுப்பினதும் கடைசி உறுப்பினதும் பெருக்கம் $= x^2 \times 10$
$= 10x^2$

நடு உறுப்பு $= 7x$

பெருக்கம் $10x^2$ ஆகவும் கூட்டுத்தொகை $7x$ ஆகவும் உள்ள உறுப்புச் சோடியைக் காண்போம்.

இதற்குக் கீழேயுள்ள அட்டவணையை அவதானிப்போம்.

உறுப்புகளின் சோடி	பெருக்கம் = $10x^2$	கூட்டுத்தொகை
$x, 10x$	$x \times 10x = 10x^2$	$x + 10x = 11x$
$2x, 5x$	$2x \times 5x = 10x^2$	$2x + 5x = 7x$
$(-x), (-10x)$	$(-x) \times (-10x) = 10x^2$	$(-x) + (-10x) = -11x$
$(-2x), (-5x)$	$(-2x) \times (-5x) = 10x^2$	$(-2x) + (-5x) = -7x$

அட்டவணையிலிருந்து நடு உறுப்பாகிய $7x$ ஐ $2x + 5x$ என எழுதுதல் வேண்டும் என்பது தெளிவு. அதற்கேற்ப இப்போது தரப்பட்டுள்ள மூவுறுப்புக் கோவையின் காரணிகளைக் காண்போம்.

$$x^2 + 7x + 10 = x^2 + 2x + 5x + 10$$
$$= x(x+2) + 5(x+2)$$
$$= (x+2)(x+5)$$

$\therefore$ $x^2 + 7x + 10$ இன் காரணிகள் $(x + 2)$, $(x + 5)$ ஆகும்.

மேற்குறித்த $x^2 + 7x + 10$ இன் நடுஉறுப்பை $2x + 5$ இற்கு பதிலாக $5x + 2x$ என எழுதுவதன்மூலம் பெறப்படும் காரணிகள் வேறுபடுகின்றனவா எனப் பார்போம்.

$$x^2 + 7x + 10 = x^2 + 5x + 2x + 10$$
$$= x(x+5) + 2(x+5)$$
$$= (x+5)(x+2)$$

இங்கும் அதே காரணிச் சோடியே கிடைத்துள்ளது. ஆகவே, தெரிந்தெடுத்த உறுப்புகளை எழுதும் ஒழுங்குமுறை இறுதிக் காரணிகளில் தங்கியிருப்பதில்லை. இதற்கேற்ப, $7x = 2x + 5x$ அல்லது $7x = 5x + 2x$ ஆகிய இரண்டில் விரும்பிய ஒரு விதத்தில் எழுதிக் காரணிகளைக் காணலாம்.

உதாரணம் 1

$a^2 - 8a + 12$ இன் காரணிகளை வேறுபடுத்துக.

முதல் உறுப்பினதும் கடைசி உறுப்பினதும் பெருக்கம்

$= a^2 \times 12 = 12a^2$

நடு உறுப்பு $= -8a$

பெருக்கம் $12a^2$ ஆகவும் நடு உறுப்பு $-8a$ ஆகவும் உள்ள இரு உறுப்புகளைக் காண்க.

உறுப்புகளின் சோடி	பெருக்கம்	கூட்டுத்தொகை
$a, 12a$	$a \times 12a = 12a^2$	$a + 12a = 13a$
$2a, 6a$	$2a \times 6a = 12a^2$	$2a + 6a = 8a$
$3a, 4a$	$3a \times 4a = 12a^2$	$3a + 4a = 7a$
$(-a), (-12a)$	$(-a) \times (-12a) = 12a^2$	$(-a) + (-12a) = -13a$
$(-2a), (-6a)$	$(-2a) \times (-6a) = 12a^2$	$(-2a) + (-6a) = -8a$
$(-3a), (-4a)$	$(-3a) \times (-4a) = 12a^2$	$(-3a) + (-4a) = -7a$

$\therefore -8a = -2a - 6a$ என எழுதலாம்

$$\begin{aligned} \therefore\ a^2 - 8a + 12 &= a^2 - 2a - 6a + 12 \\ &= a(a-2) - 6(a-2) \\ &= (a-2)(a-6) \end{aligned}$$

குறிப்பு : இங்கு உதாரணத்துக்காகவே ஓர் அட்டவணை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. நடு உறுப்பை ஒரு கூட்டுத்தொகையாக மனக்கணித ரீதியாகவும் பெற்று எழுதலாம்.

உதாரணம் 2

$x^2 - 7x - 8$ இன் காரணிகளை வேறுபடுத்துக.

முதல் உறுப்பினதும் கடைசி உறுப்பினதும் பெருக்கம் $= x^2 \times (-8) = -8x^2$

நடு உறுப்பு $= -7x$

பெருக்கம் $-8x^2$ ஆகவும் கூட்டுத்தொகை $-7x$ ஆகவும் உள்ள உறுப்புச் சோடியைக் காண்க.

இதற்கேற்ப,

$$\begin{aligned} & x^2 - 7x - 8 \\ &= x^2 + x - 8x - 8 \\ &= x(x+1) - 8(x+1) \\ &= (x+1)(x-8) \end{aligned}$$

இருபடி உறுப்பு மறையான $-x^2 - x + 6$ போன்ற ஒரு கோவையின் காரணிகளை வேறுபடுத்தும் விதத்தைப் பார்ப்போம். இக்கோவையை இருபடி உறுப்பு கடைசியில் இருக்குமாறு $6 - x - x^2$ என்ற வடிவத்தில் எழுதுவதன் மூலமும் காரணிகளைக் காணலாம். இவ்விரு விதங்களிலும் காரணிகளைக் காணலாம் என்பதைப் பின்வரும் உதாரணங்களிலிருந்து இனங்காண்போம்.

உதாரணம் 3

$-x^2 - x + 6$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= -6x^2$

நடு உறுப்பு $= -x$ எனவே $-x = 2x - 3x$ என எழுதவேண்டும்.

$-x^2 - x + 6$	அல்லது	$6 - x - x^2$
$= -x^2 + 2x - 3x + 6$		$= 6 + 2x - 3x - x^2$
$= x(-x+2) + 3(-x+2)$		$= 2(3+x) - x(3+x)$
$= (-x+2)(x+3)$		$= (3+x)(2-x)$
$= (2-x)(x+3)$		$= (2-x)(x+3)$

உதாரணம் 4

$a^2 - 4ab - 5b^2$ இன் காரணிகளை வேறுபடுத்துக. இங்கு b ஐ ஒரு மாறிலியாகக் கருதும்போது அக்கோவையை a யின் மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையாகக் கருதலாம். அப்போது $a^2 - 4ab - 5b^2$ இன் முதல் உறுப்பினதும் கடைசி உறுப்பினதும் பெருக்கம் $= a^2\ (-5b^2) = -5a^2b^2$

நடு உறுப்பு $= -4ab$

பெருக்கம் $-5a^2b^2$ ஆகவும் கூட்டுத்தொகை $-4ab$ ஆகவும் உள்ள இரு உறுப்புகள் $-4ab$ யும் ab யும் ஆகும்.

$$\begin{aligned} & a^2 - 4ab - 5b^2 \\ &= a^2 + ab - 5ab - 5b^2 \\ &= a(a+b) - 5b(a+b) \\ &= (a+b)(a-5b) \end{aligned}$$

குறிப்பு: இதனை b இன் மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையாகக் கருதியும் காரணிகளை வேறுபடுத்தலாம். அப்போது மேற்குறித்த விடையே பெறப்படும்.

மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகளின் செவ்வைத் தன்மை

ஒரு மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையொன்றின் காரணிகளை வேறுபடுத்தி அக்காரணிகள் சரியாவெனச் சோதித்துப் பார்ப்போம். அதற்காக $x^2 + 3x - 40$ இன் காரணிகளை வேறுபடுத்துவோம்.

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 40 &= x^2 + 8x - 5x - 40 \\ &= x(x+8) - 5(x+8) \\ &= (x+8)(x-5) \end{aligned}$$

$(x+8)$, $(x-5)$ என்னும் காரணிச் சோடி சரியானது எனின், அவற்றின் பெருக்கத்திலிருந்து முதற் கோவை கிடைத்தல் வேண்டும். $(x + 8)(x - 5)$ என்னும் பெருக்கத்தைக் காண்போம்.

$$(x + 8)(x - 5) = x^2 - 5x + 8x - 40$$

$$= x^2 + 3x - 40$$

$x^2 + 3x - 40$ எனக் கிடைத்துள்ளமையால் அதன் காரணிகள் $(x + 8)$, $(x - 5)$ என்பவை சரியாகும்.

பயிற்சி 7.1

1. பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

அட்சரகணித உறுப்புகளின் சோடி	பெருக்கம்	கூட்டுத்தொகை
$4x, x$	$4x^2$	$5x$
$2x, 7x$	....	....
$-5x, x$	....	....
$-3a, -7a$	....	....
$-p, -5p$	....	....
$2mn, -8mn$	....	....
....	$-4x^2$	$3x$
....	$-7x^2$	$6x$
....	$-10a^2$	$-3a$
....	$8p^2$	$6p$

2. பின்வரும் மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

I.
a. x^2+6x+8 **b.** $a^2-8a+15$ **c.** $p^2+8p+12$
d. $x^2-10x+21$ **e.** $m^2+11m+24$ **f.** $y^2-11y+18$
g. $n^2+15n+14$ **h.** $x^2-17x+30$ **i.** $a^2+14a+49$
j. $p^2-12p+35$ **k.** $p^2+8p-20$ **l.** $x^2-3x-10$
m. p^2+p-20 **n.** $n^2-4n-21$ **o.** $a^2+3a-28$
p. $y^2-4y-12$ **q.** $m^2-40+6m$ **r.** $5p+p^2-24$
s. $45+x^2-14x$ **t.** $n^2-28-12n$

II. **a.** $10-3x-x^2$ **b.** $12-p-p^2$ **c.** $12-4x-x^2$

d. $50+5x-x^2$ **e.** $18+7a-a^2$ **f.** $56-y-y^2$

III. **a.** $a^2+7ab+10b^2$ **b.** $x^2+3xy+2y^2$

c. $p^2-7pq+12q^2$ **d.** $y^2+10ay+24a^2$

e. $a^2-10ab+21b^2$ **f.** $x^2-2xy-8y^2$

g. $p^2+pq-12q^2$ **h.** $y^2-3py-10p^2$

i. $a^2-ab-20b^2$ **j.** $x^2+6xy-40y^2$

3. x இனால் தரப்படும் ஓர் எண்ணுடன் வேறோர் எண்ணைக் கூட்டியும் x இனால் தரப்படும் எண்ணிலிருந்து வேறோர் எண்ணைக் கழித்தும் பெறப்படும் கோவைகளின் பெருக்கம் x^2+x-56 ஆகும்.

(i) தரப்பட்டுள்ள கோவையின் காரணிகளைக் காண்க.

(ii) x இனால் தரப்படும் எண்ணுடன் எவ்வளவு கூட்டப்பட்டுள்ளது?

(iii) x இனால் தரப்படும் எண்ணிலிருந்து எவ்வளவு கழிக்கப்பட்டுள்ளது?

7.2 மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள் (மேலும்)

நாம் இரண்டாம்படி உறுப்பின் குணகம் 1 அல்லது -1 ஆக இருக்கும் இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காணும் விதம் பற்றி ஆராய்ந்தோம். இரண்டாம்படி உறுப்பின் குணகம் வேறு ஒரு நிறைவெண் பெறுமானத்தை எடுக்கும் சந்தர்ப்பங்களில் காரணிகளைக் காணும் விதம் பற்றி இப்போது பார்ப்போம். மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவை $3x^2+14x+15$ ஐக் கருதுவோம். அது ax^2+bx+c எனும் வடிவத்தில் இருக்கின்றது.அதில் a யின் பெறுமானம் 3 ஆகும். இங்கும் மேற்குறித்த முறையையே பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

$3x^2+14x+15$ இன் காரணிகளை வேறுபடுத்துக.

காரணிகளின் பெருக்கம் $= 45x^2$

கூட்டுத்தொகை $= 14x$ ஆக வேண்டும்.

$$\begin{aligned}\therefore\ 3x^2+14x+15 &= 3x^2+5x+9x+15\\ &= x(3x+5)+3(3x+5)\\ &= (3x+5)(x+3)\end{aligned}$$

உதாரணம் 2

காரணிகளை வேறுபடுத்துக.

$6x^2 + x - 15$

$= 6x^2 + 10x - 9x - 15$

$= 2x(3x + 5) - 3(3x + 5)$

$= (3x + 5)(2x - 3)$

உதாரணம் 3

காரணிகளை வேறுபடுத்துக.

$2a^2 - 13ab - 7b^2$

$= 2a^2 - ab + 14ab - 7b^2$

$= a(2a - b) + 7b(2a - b)$

$= (2a - b)(a + 7b)$

மேலேயுள்ள உதாரணங்களில் $ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான இருபடிக் கோவைகளில் a,b,c ஆகியவை நிறைவெண்களாகும். அவை பின்னங்களாக உள்ள போதும் கீழேயுள்ள உதாரணத்தில் தரப்பட்டுள்ள முறையில் அதன் காரணிகளைக் காணலாம்.

உதாரணம் 4

$x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ என்னும் இருபடிக் கோவையின் காரணிகளைக் காண்க.

இங்கு முதலில் தரப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவையை ஒரு பொதுப் பகுதியெண்ணில் எழுதுவோம்.

$$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = \frac{2x^2 + 5x + 2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2x^2 + 5x + 2)$$

இன் அடைப்பினுள்ளே உள்ள இருபடிக் கோவைகளின் காரணி காண்போம்.

$$2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + x + 4x + 2$$

$$= x(2x + 1) + 2(2x + 1)$$

$$= (2x + 1)(x + 2)$$

எனவே $x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = \frac{1}{2}(2x + 1)(x + 2)$

பயிற்சி 7.2

1. பின்வரும் மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

I.

a. $2x^2 + 3x + 1$	**b.** $5a^2 - 7a + 2$	**c.** $2x^2 - x - 1$
d. $4p^2 + 4p - 3$	**e.** $6x^2 + 3x - 3$	**f.** $2x^2 - 11xy + 15y^2$
g. $2y^2 - 5ya + 3a^2$	**h.** $2a^2 + 7ab + 6b^2$	**i.** $5p^2 - 9pq - 2q^2$
j. $2m^2 + 3mn - 2n^2$	**k.** $x^2y^2 + 10xy + 16$	**l.** $2x^3 - x^2y - 3xy^2$

2. மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $8^2 + 7 \times 8 + 10$ (ii) $93^2 + 3 \times 93 - 28$

(iii) $27^2 - 4 \times 27 - 21$ (iv) $54^2 + 2 \times 54 - 24$

7.3 இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாகக் காட்டப்படும் கோவைகளின் காரணிகள்

$(x - y)$, $(x + y)$ என்னும் ஈருறுப்பு கோவைகளின் பெருக்கத்தைக் கருதுக.

$$(x - y)(x + y) = x^2 + xy - xy - y^2$$
$$= x^2 - y^2$$

$x^2 - y^2$ என இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் கிடைத்துள்ளது. அதாவது $x^2 - y^2$ வடிவத்தில் உள்ள ஒரு கோவையின் காரணிகள் $x - y$, $x + y$ ஆகும்.

மேலும் $x^2 - y^2$ ஓர் இருபடிக் கோவையாகும். இங்கு நடு உறுப்பை 0 எனக் கொண்டு மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையின் வடிவத்திற்கு $x^2 + 0 - y^2$ என எழுதலாம். அதன் காரணிகளை வேறுபடுத்துவோம்.

முதல்,கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= - x^2 y^2$

நடு உறுப்பு $= 0$ ஆகவேண்டும்.

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ஆகும்.

$$x^2 + 0 - y^2$$
$$= x^2 - xy + xy - y^2$$
$$= x(x - y) + y(x - y)$$
$$= (x - y)(x + y)$$

இதன் மூலமும் $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ஆகும்.

இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகள் இடம்பெறும் பின்வரும் உதாரணங்களைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

(i) $x^2 - 4$ (ii) $4x^2 - 9$ (iii) $25a^2 - 16b^2$ என்பவற்றை காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

(i)
$$x^2 - 4$$
$$= x^2 - 2^2$$
$$= (x - 2)(x + 2)$$

(ii)
$$4x^2 - 9$$
$$= (2x)^2 - 3^2$$
$$= (2x - 3)(2x + 3)$$

(iii)
$$25a^2 - 16b^2$$
$$= (5a)^2 - (4b)^2$$
$$= (5a - 4b)(5a + 4b)$$

மேற்குறித்த உதாரணங்களைப் பரிசீலித்து பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 7.3

1. கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

(i) $x^2 - 36$
$= x^2 - ....^2$
$= (x-6)(x+6)$

(ii) $9 - y^2$
$= .... - ....$
$= (......)(......)$

(iii) $25x^2 - 4y^2$
$= (...)^2 - (...)^2$
$= (......)(......)$

(iv) $2a^2 - 8b^2$
$= 2(.............)$
$= 2(a^2 - (....)^2)$
$= 2(......)(......)$

(v) $3p^2 - 27q^2$
$= 3(..... - ....)$
$= 3\,[(...)^2 - (...)^2]$
$= ......(......)(......)$

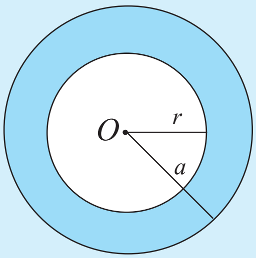
(vi) $a^2b^2 - 1$
$= (ab)^2 - ....$
$= (... - ...)(... + ...)$

2. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

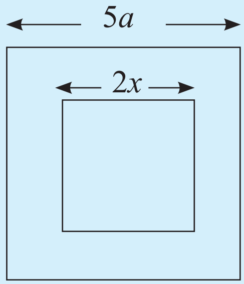
a. $y^2 - 81$ **b.** $16 - b^2$ **c.** $100 - n^2$ **d.** $m^2n^2 - 1$
e. $16a^2 - b^2$ **f.** $4x^2 - 25$ **g.** $9p^2 - 4q^2$ **h.** $400 - 4n^2$
i. $8x^2 - 2$ **j.** $4x^2y^2 - 9y^2$

3. O வை மையமாகக் கொண்ட இரு ஒரு மைய வட்டங்கள் உருவில் காணப் படுகின்றன. சிறிய வட்டத்தின் ஆரை r உம் பெரிய வட்டத்தின் ஆரை a யும் ஆகும்.

(i) சிறிய வட்டத்தின் பரப்பளவை π , r ஆகியவற்றின் சார்பிற் காட்டுக.
(ii) பெரிய வட்டத்தின் பரப்பளவை π , a ஆகியவற்றின் சார்பிற் காட்டுக.
(iii) உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவுக்காக π, r , a ஆகியன இடம்பெறும் கோவையை எழுதி அதனைக் காரணிகளின் ஒரு பெருக்கமாகக் காட்டுக.



4. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $5a$ அலகுகளாகவும் $2x$ அலகுகளாகவும் உள்ள இரு சதுரங்கள் உருவில் காணப்படுகின்றன.
(i) சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவை x இன் சார்பிற் காட்டுக.
(ii) பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவை a இன் சார்பிற் காட்டுக.
(iii) பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவிலும் பார்க்க $(5a + 2x)\,(5a - 2x)$ சதுர அலகுகளினால் கூடியது எனக் காட்டுக.



7.4 இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகள் (மேலும்)

இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாகக் கருதிக் காரணிகள் காணப்படத்தக்க பல அட்சர கணிதக் கோவைகள் உள்ளன. பின்வருவன அத்தகைய இரு சந்தர்ப்பங்களாகும்.

உதாரணம் 1

பின்வருவனவற்றை காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

(i) $(x+2)^2 - y^2$ (ii) $(a-2)^2 - (a+5)^2$

(i) $(x+2)^2 - y^2$

$= [(x+2)-y]\,[(x+2)+y]$

$= (x+2-y)(x+2+y)$

(ii) $(a-2)^2 - (a+5)^2$

$= [(a-2)-(a+5)]\,[(a-2)+(a+5)]$

$= (a-2-a-5)(a-2+a+5)$

$= -7(2a+3)$

பயிற்சி 7.4

1. காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

a. $(x+1)^2 - 4$ **b.** $(y-2)^2 - 9$ **c.** $(2a+3)^2 - 49$

d. $(4x-3y)^2 - 25$ **e.** $(2p+3)^2 - 4q^2$ **f.** $25-(x+3)^2$

g. $4-(a-2)^2$ **h.** $16-(m+2)^2$ **i.** $(m+2)^2 - (m+1)^2$

j. $(2x+3)^2 - (x-2)^2$

பலவினப் பயிற்சி

1. பின்வருவனவற்றைக் காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

a. $(x-y)^2 - 4a^2b^2$ **b.** $x^2y^2 + 10xy + 16$

c. $p^2q^2 - pq - 20$ **d.** $2x^3 - x^2y - 3xy^2$

e. $6x^2 - 2x - 4$ **f.** $(x+1)^2 - (x-3)^2$

g. $x(x+5) - 14$ **h.** $(2x-1)^2 - 4$

2. பின்வருவனவற்றைச் காரணிகளாக வேறுபடுத்துக. (சாடை $x^2 = y$ எனக் கொள்க.)

a. $x^4 + 5x^2 + 6$ **b.** $x^4 - 16$

c. $2x^4 + 14x^2 + 24$ **d.** $1 - 81x^4$

8 முக்கோணிகள் I

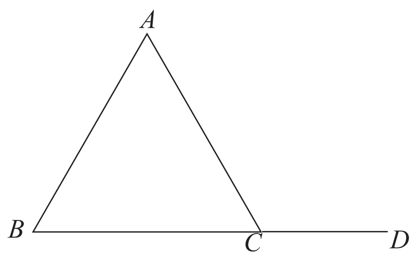
இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,

- ஒரு முக்கோணியின் கோணங்களுடன் தொடர்புபட்ட தேற்றங்களைக் கொண்டு ஏறிகளை நிறுவுவதற்குத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களும் புறக் கோணங்களும்

ஒரு முக்கோணி $A\hat{C}B$ யினுள்ளே இருக்கும் $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$, $A\hat{C}B$ ஆகிய கோணங்கள் அம்முக்கோணியின் அகக் கோணங்கள் அல்லது சுருக்கமாக முக்கோணியின் கோணங்கள் எனப்படும்.



முக்கோணி ABC யின் பக்கம் BC ஆனது உருவில் உள்ளவாறு D யிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. அப்போது உண்டாகும் $A\hat{C}D$ ஆனது முக்கோணி யின் ஒரு **புறக் கோணம்** ஆகும். BCD ஆனது ஒரே நேர்கோடு ஆகையால் $A\hat{C}B$ ஆனது $A\hat{C}D$ இற்கு மிகைநிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணம் ஆகும். $A\hat{C}B$ தவிர மற்றைய இரண்டு கோணங்களான $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ ஆகியன புறக் கோணம் $A\hat{C}D$ யின் **அகத்தெதிர்க் கோணங்கள்** எனப்படும். இவ்வாறே முக்கோணியின் எஞ்சியுள்ள பக்கங்களை நீட்டும்போது உண்டாகும் புறக் கோணங்கள் தொடர்பாகவும் அகத்தெதிர் கோணச் சோடி வீதம் உள்ளன.

பின்வரும் தேற்றங்கள் ஒரு முக்கோணியின் புறக் கோணத்திற்கும் அகத்தெதிர்க் கோணத்திற்குமிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பைக் காட்டுகின்றன.

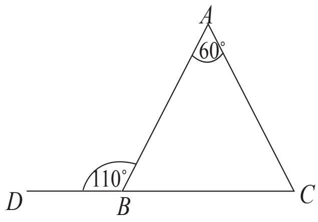
தேற்றம் - ஒரு முக்கோணியின் யாதாயினும் ஒரு பக்கத்தை நீட்டும்போது உண்டாகும் புறக் கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும்

இதற்கேற்ப மேற்குறித்த முக்கோணி ABC யிற்கு

$$A\hat{C}D = A\hat{B}C + B\hat{A}C$$

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் முறை பற்றிப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1



உருவில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $A\hat{C}B$ யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

மேற்குறித்த தேற்றத்திற்கேற்ப

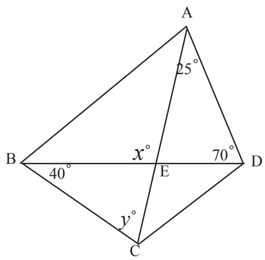
$B\hat{A}C + A\hat{C}B = A\hat{B}D$ (புறக் கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$\therefore A\hat{C}B + 60^\circ = 110^\circ$

$\therefore A\hat{C}B = 110^\circ - 60^\circ$

$A\hat{C}B = 50^\circ$

உதாரணம் 2



உருவில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $A\hat{E}B$, $B\hat{C}E$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$A\hat{E}B = x^\circ$ எனவும்

$B\hat{C}E = y^\circ$ எனவும் கொள்வோம்

$A\hat{E}B$ ஆனது முக்கோணி AED யின் ஒரு புறக் கோணம் என்பது தெளிவாகும்.

இதற்கேற்ப,

$x = 25^\circ + 70^\circ$ (புறக் கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$= 95^\circ$

மேலும் $A\hat{E}B$ ஆனது முக்கோணி BCE யின் ஒரு புறக் கோணம் ஆகையால்,

$y + 40^\circ = x$ (புறக் கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$\therefore y + 40^\circ = 95^\circ$

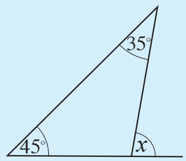
$\therefore y = 95^\circ - 40^\circ$

$y = 55^\circ$

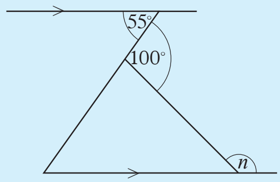
மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் வரிப்படங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தெரியாக் கணியம் மூலம் காட்டப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

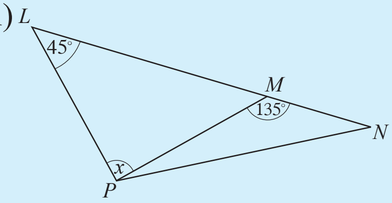
(i)



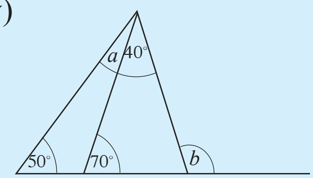
(ii)



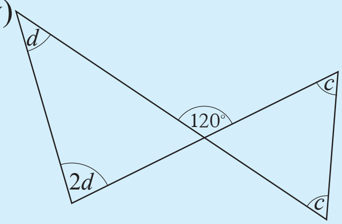
(iii)



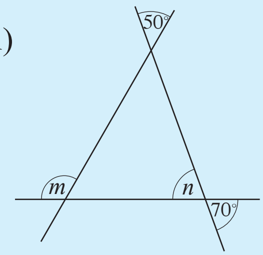
(iv)



(v)

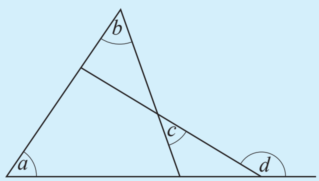


(vi)

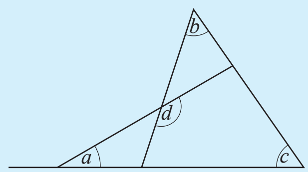


2. பின்வரும் வரிப்படங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப, d யின் பெறுமானத்தை a,b,c ஆகியவற்றின் சார்பில் தருக.

(i)

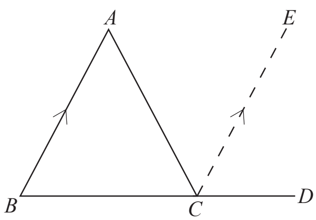


(ii)



8.1 ஒரு முக்கோணியின் புறக் கோணம் பற்றிய தேற்றத்தின் முறைமையான நிறுவலும் அதன் பிரயோகமும்

முறைமையான நிறுவல் :



தரவு: முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC ஆனது D யிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது.

நிறுவ வேண்டியது : $A\hat{C}D = A\hat{B}C + B\hat{A}C$

அமைப்பு : AB யிற்குச் சமாந்தரமாக CE யை வரைக.

$E\hat{C}D = A\hat{B}C$ ($BA // CE$ (ஆகையால் ஒத்த கோணங்கள்) — ①

$A\hat{C}E = B\hat{A}C$ ($BA // CE$ (ஆகையால் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)— ②

① ,② இலிருந்து

$E\hat{C}D + A\hat{C}E = A\hat{B}C + B\hat{A}C$ (வெளிப்படையுண்மைகளை பயன்படுத்தும்போது)

ஆனால் உருவிற்கேற்ப $E\hat{C}D$, $A\hat{C}E$ ஆகிய அடுத்துள்ள கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை $A\hat{C}D$ ஆகும்.

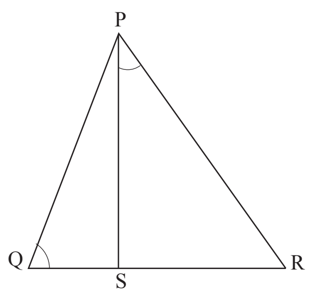
$\therefore A\hat{C}D = A\hat{B}C + B\hat{A}C$

முறைமையாக நிறுவப்பட்ட புறக் கோணத் தேற்றத்துடன் இதுவரைக்கும் கற்ற வேறு தேற்றங்களையும் பயன்படுத்திச் சில பிரசினங்களைத் தீர்ப்போம்.

உதாரணம் 1

முக்கோணி PQR இல் பக்கம் QR இன் மீது புள்ளி S ஆனது $P\hat{Q}S = S\hat{P}R$ ஆகுமாறு உள்ளது. $Q\hat{P}R = P\hat{S}R$ என நிறுவுக.

முதலில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப வரிப்படத்தை வரைவோம்



நிறுவல் : முக்கோணி PQS இல் பக்கம் QS ஆனது R வரை நீட்டப்பட்டுள்ளதால்

$\therefore Q\hat{P}S + P\hat{Q}S = P\hat{S}R$ (தேற்றம்)

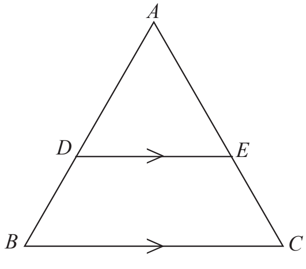
$\therefore Q\hat{P}S + S\hat{P}R = P\hat{S}R$ ($\because P\hat{Q}S = S\hat{P}R$)

ஆனால் $Q\hat{P}S + S\hat{P}R = Q\hat{P}R$ (அடுத்துள்ள கோணம்)

$\therefore Q\hat{P}R = P\hat{S}R$

உதாரணம் 2

வரிப்படத்தில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $B\hat{A}C + A\hat{B}C = D\hat{E}C$ என நிறுவுக.



$D\hat{E}C$ ஆனது $\Delta\, ADE$ இன் புறக் கோணமாகும்

$D\hat{E}C = D\hat{A}E + A\hat{D}E$

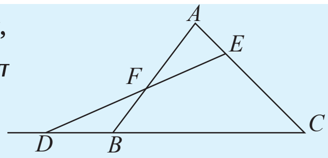
$D\hat{A}E$ யும் $B\hat{A}C$ யும் ஒரே கோணமாகும்

$A\hat{D}E = A\hat{B}C$ (ஒத்த கோணங்கள் $DE//BC$)

ஆகவே, $D\hat{E}C = B\hat{A}C + A\hat{B}C$

பயிற்சி 8.1

1. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $B\hat{D}F = F\hat{A}E$ எனின், $F\hat{B}C = F\hat{E}C$ என நிறுவுவதற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.



நிறுவல் : முக்கோணி DFB யில் பக்கம், DB ஆனது C ற்கு நீட்டப்பட்டிருப்பதனால்

$F\hat{B}C = ... + ...$

$B\hat{F}D = ...$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$B\hat{D}F = ...$ (..........)

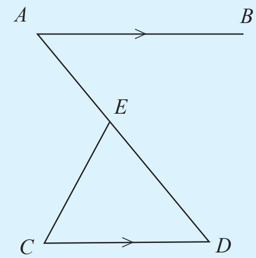
$\therefore F\hat{B}C = ... + ...$

மேலும் FEC ஆனது ΔAEF இன் புறக் கோணம் என்பதால்

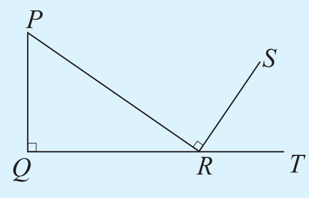
$F\hat{E}C = ... + ...$ (..........)

$\therefore F\hat{B}C = F\hat{E}C$

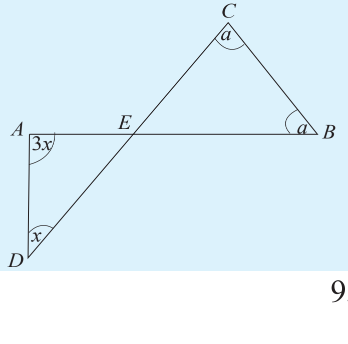
2. உருவில் உள்ளவாறு AB யும் CD யும் சமாந்தர மானவையெனின் $A\hat{E}C = B\hat{A}D + E\hat{C}D$ என நிறுவுக.



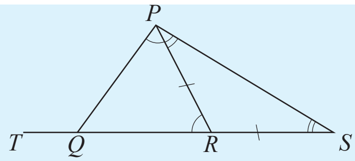
3. உருவில் உள்ளவாறு $P\hat{Q}R$ உம் $P\hat{R}S$ உம் செங் கோணங்கள் ஆகும். QRT ஒரு நேர்கோடு ஆயின். $Q\hat{P}R = S\hat{R}T$ என நிறுவுக.



4. உருவில்உள்ளவாறு AB, CD என்னும் நேர்கோடுகள் E இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $a = 2x$ எனக் காட்டுக.



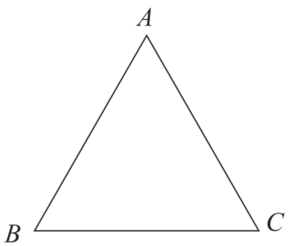
5. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $P\hat{R}Q = Q\hat{P}R$ உம் $R\hat{P}S = P\hat{S}R$ உம் ஆகும். தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $P\hat{Q}T = 4\ P\hat{S}R$ எனக் காட்டுக. (சாடை: $P\hat{S}R = x$ எனக் கொள்க).



6. முக்கோணி PQR இல் PQ இற்குச் செங்குத்தாக SR உம் PR இற்குச் செங்குத்தாக QT யும் அமைந்துள்ளன. SR, QT என்பன U வில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன.
$S\hat{Q}U = T\hat{R}U$ என நிறுவுக.

7. முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC ஆனது E வரைக்கும் நீட்டப்பட்டுள்ளது. $B\hat{A}C = C\hat{A}D$ ஆக இருக்குமாறும் பக்கம் CE யை D சந்திக்குமாறும் AD வரையப்பட்டுள்ளது. அத்துடன் $A\hat{B}C = B\hat{A}C$ யும் ஆகும்.
(i) $A\hat{C}D = 2\ A\hat{B}C$ எனவும்
(ii) $A\hat{D}E = 3\ A\hat{B}C$ எனவும் நிறுவுக.

8.3 முக்கோணிகளின் அகக் கோணங்களுடன் தொடர்புடைய தேற்றம்



முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$, $A\hat{C}B$ ஆகியன அகக் கோணங்கள் ஆகும். இம்மூன்று கோணங்களினதும் பெறுமானங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} என்பதை நாம் அறிவோம். இது ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

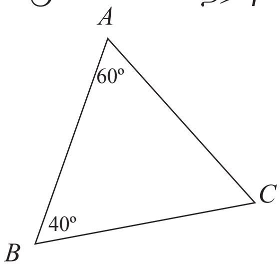
தேற்றம்: யாதாயினும் ஒரு முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரண்டு செங்கோணங்கள் ஆகும்.

மேற்குறித்த உருவிற்கேற்ப, $A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180^{0}$

முக்கோணியின் அகக் கோணத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் விதம் பற்றி ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

உருவில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $A\hat{B}C$ யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

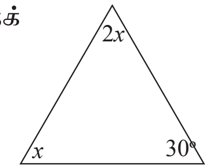


$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$60^\circ + 40^\circ + A\hat{C}B = 180^\circ$

$\therefore\ A\hat{C}B = 80^\circ$

உதாரணம் 2

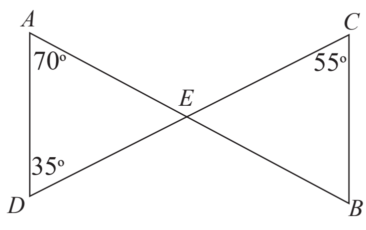


உருவில் உள்ள தரவுகளைப் பயன்படுத்தி x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகையால்,

$$x + 2x + 30^\circ = 180^\circ$$
$$3x + 30^\circ = 180^\circ$$
$$3x = 180^\circ - 30^\circ$$
$$3x = 150^\circ$$
$$\therefore\ x = 50^\circ$$

உதாரணம் 3

AB , CD என்னும் நேர் கோடுகள் E யில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. $A\hat{D}E = 35^\circ$, $D\hat{A}E = 70^\circ$, $E\hat{C}B = 55^\circ$ ஆயின் $E\hat{B}C$ யின் பெறுமானத்தைக் காண்க. முதலில் மேற்குறித்த தரவுகள் இடம்பெறும் உருவை வரைக.



உருவில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப

முக்கோணி ADE யில்

$A\hat{D}E + D\hat{A}E + A\hat{E}D = 180^\circ$ (முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$A\hat{E}D = 180^\circ - 105^\circ$

$= 75^\circ$

$A\hat{E}D = B\hat{E}C$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$\therefore\ B\hat{E}C = 75^\circ$

முக்கோணி BEC இல்

$$B\hat{E}C + E\hat{C}B + E\hat{B}C = 180^{\circ} \text{ (முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)}$$
$$= 180^{\circ} - (75^{\circ} + 55^{\circ})$$
$$E\hat{B}C = 180^{\circ} - 130^{\circ}$$
$$= 50^{0}$$

உதாரணம் 4

அகக் கோணங்கள் 55^{o}, 60^{o}, 75^{o} ஆகவுள்ள ஒரு முக்கோணி இருக்க முடியுமாவெனத் துணிக.

தரப்பட்டுள்ள மூன்று கோணங்களினதும்

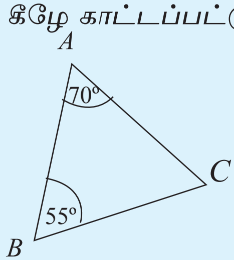
கூட்டுத்தொகை $= 55^{o} + 60^{o} + 75^{o}$

$= 190^{o}$

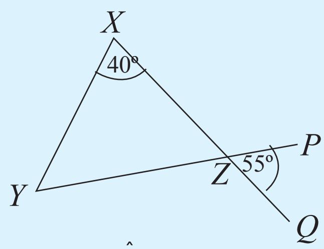
எந்தவொரு முக்கோணியினதும் அகக் கோணங்களின் கூட்டத்தொகை 180^{o} ஆக இருத்தல் வேண்டும். மேற்குறித்த மூன்று கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை 180^{o}இலும் பார்க்கக் கூடியதாக இருப்பதனால் தரப்பட்டுள்ள அகக் கோணங்களைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணி இருக்கமுடியாது.

பயிற்சி 8.2

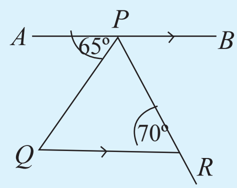
1. பின்வரும் வரிப்படங்கள் ஒவ்வொன்றையும் கொண்டு அவ்வரிப்படத்திற்குக் கீழே காட்டப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.



$A\hat{C}B$



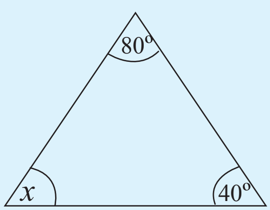
$X\hat{Y}Z$



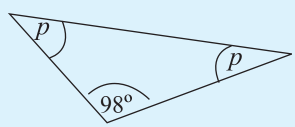
$Q\hat{P}R$

2. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தெரியாக் கணியத்தின் மூலம் காட்டப்படும் கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

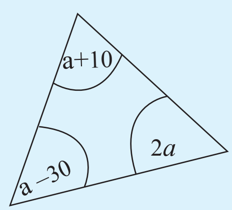
(i)

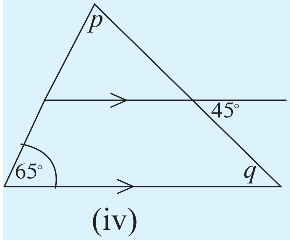


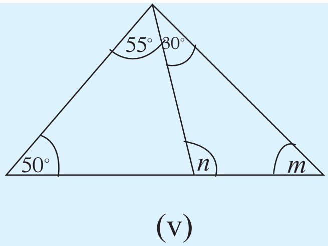
(ii)

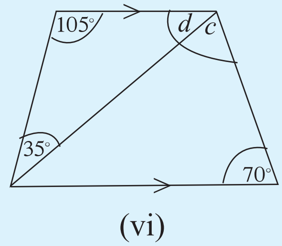


(iii)









3. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள கோணத் திரிதம் முக்கோணியின் அகக் கோணங்களாக இருக்க முடியுமாவெனத் துணிக.

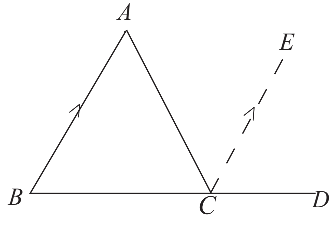
(i) 50º, 40º,90º (ii) 70º, 30º, 75º (iii) 55º, 72º, 58º
(iv) 60º, 60º, 60º (v) 100º, 20º, 65º (vi) 53º, 49º, 78º

4. ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்கள் 2 : 3 : 4 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன. இக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. ஒரு முக்கோணியின் மிகப் பெரிய கோணத்தின் பெறுமானம் மிகச் சிறிய கோணத்தின் பெறுமானத்தின் மும்மடங்காகும். எஞ்சியுள்ள கோணத்தின் பெறுமானம் மிகச் சிறிய கோணத்தின் பெறுமானத்தின் இரண்டு மடங்காகும். முக்கோணியின் கோணங்களை வேறுவேறாகக் காண்க.

8.4 முக்கோணிகளின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை பற்றிய தேற்றத்தின் முறைமையான நிறுவலும் அதன் பிரயோகமும்

"யாதேனும் ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரண்டு செங்கோணங்களாகும் என்னும் தேற்றத்தின் முறைமையான நிறுவல் கீழே தரப்படுகின்றது.



தரவு : ABC ஒரு முக்கோணி

நி. வே : $A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180^\circ$

அமைப்பு : பக்கம் BC ஐ D வரை நீட்டுக. BA இற்குச் சமாந்தரமாக C இனூடாக CE ஐ வரைக.

நிறுவல் : $A\hat{B}C = E\hat{C}D$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $BA//CE$) —— ①

$B\hat{A}C = A\hat{C}E$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $BA//CE$) —— ②

①+ ② : இலிருந்து

$$A\hat{B}C + B\hat{A}C = E\hat{C}D + A\hat{C}E$$

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களுடனும் $A\hat{C}B$ ஐ கூட்டும்போது

$$A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = E\hat{C}D + A\hat{C}E + A\hat{C}B$$

ஆனால்

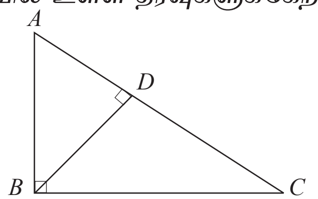
$E\hat{C}D + A\hat{C}E + A\hat{C}B = 180^{o}$ (நேர்கோடு BCD இன் மீது இருக்கும் கோணங்கள்)

$A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180^{o}$

= இரண்டு செங்கோணங்கள்

உதாரணம் 1

உருவில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $A\hat{B}D = B\hat{C}D$ என நிறுவுக.



முக்கோணி BDC இல்

நிறுவல் : $B\hat{D}C = 90^{o}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$B\hat{D}C + D\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^{o}$ (முக்கோணிகளின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$90^{o} + D\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^{o}$

$D\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^{o} - 90^{o}$

$= 90^{o}$ ——— ①

முக்கோணி ABC யில்,

$A\hat{B}C = 90^{o}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{B}C = A\hat{B}D + D\hat{B}C$ ஆகையால்

$A\hat{B}D + D\hat{B}C = 90^{o}$ ——— ②

① , ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளுக்கும் 90^{o} இற்குச் சமமாகையால்

$$D\hat{B}C + B\hat{C}D = A\hat{B}D + D\hat{B}C$$

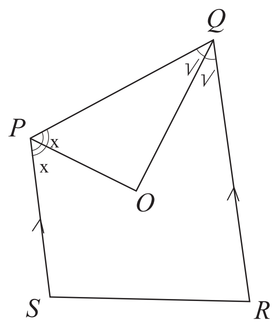
$D\hat{B}C$ ஐ இரண்டு பக்கமும் கழிக்க.

$$\therefore\ B\hat{C}D = A\hat{B}D$$

உதாரணம் 2

நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் PS உம் QR உம் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாகும். P, Q ஆகிய அகக் கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் O வில் சந்திக்கின்றன. $P\hat{O}Q$ ஒரு செங் கோணமென நிறுவுக.

முதலில் நாம் உருவை வரைவோம்.



நிறுவல்: $PS//QR$ ஆகையால்

$S\hat{P}Q + P\hat{Q}R = 180^o$ (நேயக் கோணங்கள்)

$\frac{1}{2}SPQ + \frac{1}{2}PQR = \frac{180^\circ}{2}$ (வெளிப்படையுண்மை)

SPQ வின் இருகூறாக்கி PO ஆகவும் $P\hat{Q}R$ இன் இருகூறாக்கி QO ஆகவும் இருப்பதால்

$\frac{1}{2}S\hat{P}Q = Q\hat{P}O$

$\frac{1}{2}P\hat{Q}R = P\hat{Q}O$

$\therefore\ Q\hat{P}O + P\hat{Q}O = 90^o$

முக்கோணி POQ இல்

$P\hat{O}Q + Q\hat{P}O + P\hat{Q}O = 180^o$ (அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$P\hat{O}Q = 180^o - 90^o$

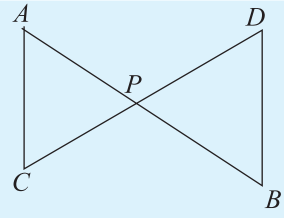
$= 90^o$

$P\hat{O}Q$ ஒரு செங்கோணம் ஆகும்.

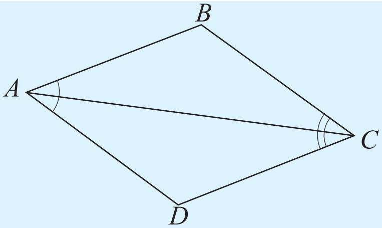
இனி நிறுவ வேண்டிய பிரசினங்களை உள்ளடக்கிய பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 8.3

1. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $A\hat{C}P = P\hat{B}D$ ஆகும். $C\hat{A}P = P\hat{D}B$ என நிறுவுக.



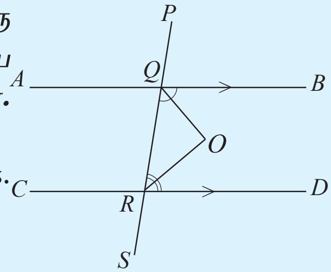
2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் நாற்பக்கல் $ABCD$ யின் மூலைவிட்டம் AC யினால் $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$ ஆகியன இருசமகூறிடப்பட்டுள்ளன. $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ என நிறுவுக.



3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் AB யும் CD யும் இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளாகும் $B\hat{Q}R$, $Q\hat{R}D$ ஆகிய கோணங்களின் இரு கூறாக்கிகள் O இல் சந்திக்கின்றன.

(i) $O\hat{Q}R + Q\hat{R}O$ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $Q\hat{O}R$ ஒரு செங்கோண முக்கோணியென நிறுவுக.

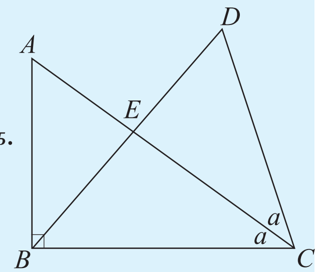


4. தரப்பட்டுள்ள உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) $B\hat{A}E$ யின் பெறுமானத்தை a யின் சார்பில் தருக.

(ii) $B\hat{D}C + D\hat{B}C$ பெறுமானத்தை a யின் சார்பிற் காட்டுக.

(iii) $B\hat{D}C + D\hat{B}C = 2\,B\hat{A}E$ எனக் காட்டுக.



5. முக்கோணி ABC யில் $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ ஆகும். $B\hat{A}C$ யின் இருகூறாக்கியானது பக்கம் BC ஐ D இல் சந்திக்கின்றது.

(i) $B\hat{A}C$ யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

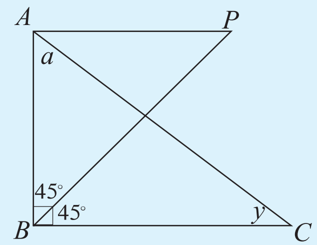
(ii) ΔABD ஒரு செங்கோண முக்கோணியென நிறுவுக.

பலவினப் பயிற்சி

1. முக்கோணி ABC யில் $\hat{A}+\hat{B} = 110^{\circ}$, $\hat{B}+\hat{C} = 120^{\circ}$ எனின் முக்கோணியின் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. முக்கோணி ABC இல் $B\hat{A}C$ யின் பெறுமானம் 100° ஆகும். $A\hat{C}B$, $A\hat{B}C$ ஆகிய அகக் கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் O இற் சந்திக்கின்றன. $B\hat{O}C$ யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யின் பக்கம் BA யிற்குச் செங்குத்தாக A யில் வரையப்பட்ட கோடு $A\hat{B}C$ யின் இருகூறாக்கியை P யிற் சந்திக்கின்றது. $B\hat{A}C + A\hat{C}B = 2\,A\hat{P}B$ என நிறுவுக.



4. முக்கோணி ABC யின் $B\hat{A}C$ யின் இருகூறாக்கியானது பக்கம் BC ஐ E யில் சந்திக்கின்றது. நீட்டப்பட்ட AE யிற்குச் செங்குத்தாக BD வரையப்பட்டுள்ளது. $A\hat{C}B = 3\,A\hat{B}C$ எனின். $A\hat{B}D$ யின் இருகூறாக்கி BC என நிறுவுக.
(சாடை: $A\hat{B}C = x$ எனவும் $B\hat{A}C = 2a$ எனவும் கொள்க).

5. ஒரு முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC க்குச் சமாந்தரமாக A யினூடான கோடு PQ வரையப்பட்டுள்ளது. இதை பயன்படுத்தி முக்கோணி ABC யின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என நிறுவுக.

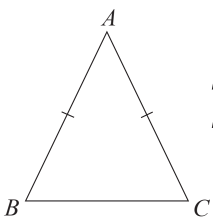
9 முக்கோணிகள் II

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- இருசமபக்க முக்கோணிகள் பற்றிய தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்குத் தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

9.1 இருசமபக்க முக்கோணிகள்

ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்கள் சமனெனின், அது இருசமபக்க முக்கோணி எனப்படும். பின்வரும் உருவில் முக்கோணி ABC ஆனது ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும். அதில் $AB = AC$ ஆகும். முக்கோணியின் ஒவ்வொரு பக்கத்திற்கும் எதிரேயுள்ள கோணம் அப்பக்கத்தின் எதிர்க் கோணம் எனப்படும்.



பக்கம் AB யின் எதிர்க் கோணம் $A\hat{C}B$ உம்
பக்கம் AC யின் எதிர்க் கோணம் $A\hat{B}C$ உம்
பக்கம் BC யின் எதிர்க் கோணம் $B\hat{A}C$ உம் ஆகும்.

இருசமபக்க முக்கோணிகள் பற்றிய ஒரு தேற்றம் கீழே காணப்படுன்றது.

தேற்றம் : யாதாயினும் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியின் இரு பக்கங்கள் சமமெனின் சம பக்கங்களின் எதிர்க் கோணங்கள் சமனாகும்.

இத்தேற்றத்திற்கேற்ப மேற்குறித்த இருசமபக்க முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$ எனின், $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ ஆகும்.

மேற்குறித்த இருசமபக்க முக்கோணித் தேற்றம் உண்மையென வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்கு பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு

- $AB = AC = 5$ cm ஆக இருக்குமாறு A, B, C என்னும் (ஒரே கோட்டில் இல்லாத) மூன்று புள்ளிகளைக் குறிக்க.
- A, B , C ஆகிய புள்ளிகளை இணைத்து முக்கோணி ABC யைப் பூரணப்படுத்துக.
- முக்கோணி ABC யின் வடிவத்தைக் கடதாசியில் வெட்டி வேறுபடுத்துக.
- பக்கம் AB யின் மீது AC இருக்குமாறு முக்கோண வடிவக் கடதாசியை மடிக்க.
- $A\hat{B}C$ உம் $A\hat{C}B$ யும் சமம் என்பதை அவதானிக்க.

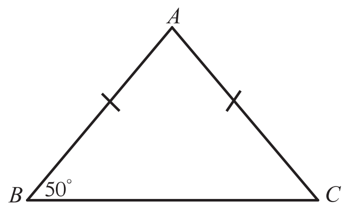
மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்க்கத்தக்க சில பிரசினங்களை இப்போது பார்ப்போம் .

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$, $A\hat{B}C = 50^{\circ}$ ஆகும்.

(i) $A\hat{C}B$

(ii) $B\hat{A}C$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



(i) $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ ஆகும். ($AB = AC$, ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணியின் சம பக்கங்களின் எதிர்க் கோணங்கள்)

$\therefore A\hat{C}B = 50^{\circ}$

(ii) முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகையால்,

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^{\circ}$$

$$\therefore B\hat{A}C + 50^{\circ} + 50^{\circ} = 180^{\circ}$$

$$\therefore B\hat{A}C = 180^{\circ} - (50^{\circ} + 50^{\circ})$$

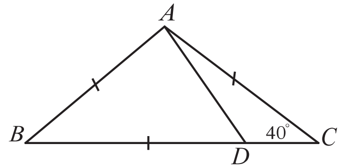
$$= 180^{\circ} - 100^{\circ}$$

$$= 80^{\circ}$$

உதாரணம் 2

முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$, $A\hat{C}B = 40^{\circ}$ ஆகும். $AB = BD$ ஆக இருக்குமாறு பக்கம் BC மீது புள்ளி D குறிக்கப்பட்டு, AD இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கோணி ABD யின் அகக் கோணங்களின் பெறுமானத்தை வெவ்வேறாகக் காண்க.

முதலில், தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கமைய உரிய உருவை வரைவோம்.



உருவின்படி

$A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (முக்கோணி ABC யின் சம பக்கங்களின் எதிர்க் கோணங்கள்)

$A\hat{B}C = 40^\circ$

$\therefore A\hat{B}D = 40^\circ$

$B\hat{A}D = B\hat{D}A$ (முக்கோணி ABD யின் சம பக்கங்களின் எதிர்க் கோணங்கள்)

$A\hat{B}D + B\hat{A}D + B\hat{D}A = 180^\circ$ (முக்கோணி ABD யின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180°)

$40^\circ + 2B\hat{A}D = 180^\circ$ ($B\hat{A}D = B\hat{D}A$ ஆகையால்)

$2B\hat{A}D = 180^\circ - 40^\circ$

$2B\hat{A}D = 140^\circ$

$B\hat{A}D = 70^\circ$

$B\hat{D}A = 70^\circ$ ($\because B\hat{A}D = B\hat{D}A$ ஆகையால்)

$\therefore$ முக்கோணி ABD யின் கோணங்களின் பெறுமானங்கள் $= 70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$

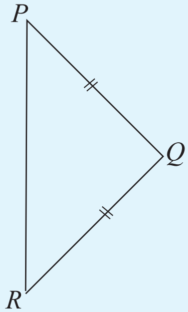
இருசமபக்க முக்கோணி தொடர்பான தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 9.1

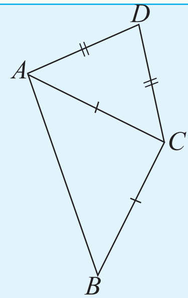
1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள உருவில் அடங்கியுள்ள எல்லா இருசமபக்க முக்கோணிகளையும் இனங்கண்டு, கீழே உள்ள அட்டவணையைப் பூர்த்திசெய்க.

உரு	முக்கோணி	சம பக்கச் சோடி	சம பக்கங்களின் எதிர்க் கோணச் சோடி
(i)	PQR	PQ, RQ	$Q\hat{P}R, Q\hat{R}P$
(ii)	ACD	AD, DC	$A\hat{C}D, D\hat{A}C$
	ABC		
(iii)	KLM		
	LMN		
(iv)	PQR		
	RST		
(v)	ABD		
	BCD		

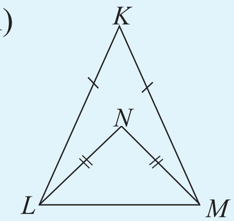
(i)



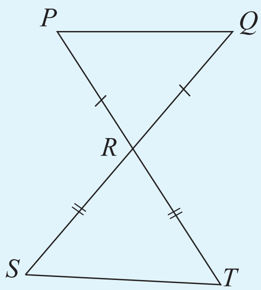
(ii)



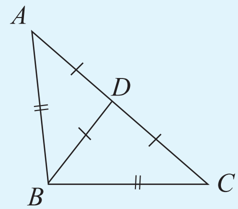
(iii)



(iv)

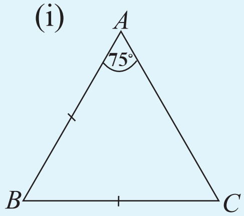


(v)

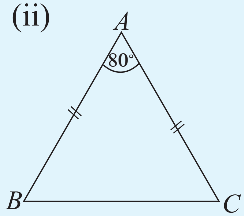


2. பின்வரும் முக்கோணிகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு கோணத்தின் பெறுமானம் தரப்பட்டுள்ளது. எஞ்சியுள்ள கோணங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.

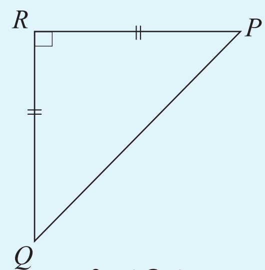
(i)



(ii)

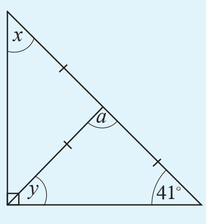


(iii)

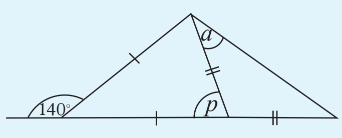


3. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தெரியாக் கணியத்தின் மூலம் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

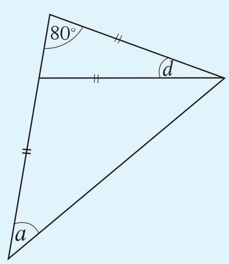
(i)

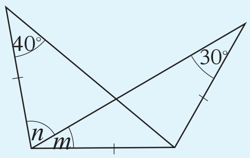


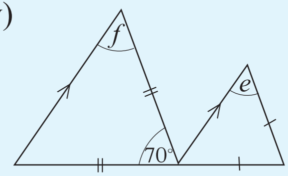
(ii)

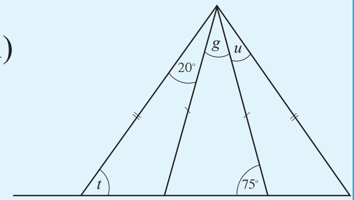


(iii)



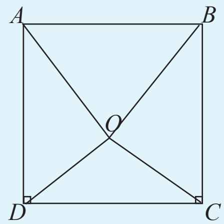
(iv) 

(v) 

(vi) 

4. ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியின் ஒன்றுக்கொன்று சமமான பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் 110° ஆகும். முக்கோணியின் எஞ்சியுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

5. AOB ஒரு சமபக்க முக்கோணியாக இருக்குமாறு சதுரம் $ABCD$ யில் புள்ளி O உள்ளது. $D\hat{O}C$ யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.



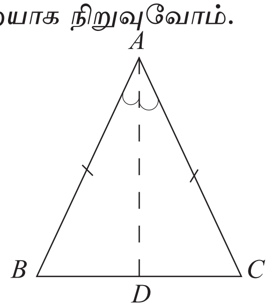
6. ஒரு முக்கோணி ABE யில் $AB = AE$ ஆகும். $AC = BC$ ஆக இருக்குமாறு புள்ளி C ஆனது BE யின் மீது உள்ளது. அகக் கோணம் $C\hat{A}E$ ஆனது உள்ளே இருசமகூறிடுமாறு வரையப்பட்ட கோடானது BE யை D யில் சந்திக்கின்றது.

(i) இத்தகவல்களை வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டுக.

(ii) $A\hat{B}C = 40^\circ$ எனின், $D\hat{A}E$ யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

9.2 இருசமபக்க முக்கோணிகளுடன் தொடர்புபட்ட தேற்றத்தின் முறைமையான நிறுவலும் அதன் பிரயோகமும்

''ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியின் சமபக்கங்களின் எதிர்க் கோணங்களும் சமம்'' என்னும் தேற்றத்தை முறையாக நிறுவுவோம்.



தரவு : முக்கோணி ABC இல் $AB = AC$ ஆகும்.

நிறுவ வேண்டியது : $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

அமைப்பு : பக்கம் BC யை D யிற் சந்திக்குமாறு அகக் $B\hat{A}C$ ஐ இருசமகூறிடுமாறு AD யை வரைதல்

நிறுவல் : ABD, ACD என்னும் இரு முக்கோணிகளில்

$AB = AC$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$B\hat{A}D = D\hat{A}C$ ($B\hat{A}C$ யின் இருசமகூறாக்கி AD ஆகையால்)

AD ஆனது இரு முக்கோணிகளுக்கும் பொதுவாகும்

$\therefore \Delta ABD \equiv \Delta ACD$ (ப.கோ.ப.)

ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்,

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$

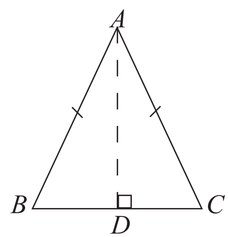
$\therefore \quad A\hat{B}C = A\hat{C}B$

மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணிகளுடன் தொடர்புபட்ட சில பேறுகளை நிறுவும் விதத்தை இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$. அதில்

- $B\hat{A}C$ யின் கோண இருகூறாக்கியும்
- A யிலிருந்து BC யிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து இருசமகூறாக்கியும்
- பக்கம் BC யின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியும்
- A யையும் BC யின் நடுப் புள்ளியையும் தொடுக்கும் கோடும் (இடையம்) ஒன்றுடனொன்று பொருந்துகின்றன எனக் காட்டுக.



இதற்காக முதலில் உச்சி A யிலிருந்து எதிர்ப் பக்கத்திற்கு ஒரு செங்குத்தை வரைவோம்.

அமைப்பு : A யிலிருந்து BC யிற்குச் செங்குத்தை வரைதல்.

நிறுவல் : $\Delta ABD, \Delta ACD$ ஆகியவற்றில்

$$AB = AC \quad (\text{தரப்பட்டுள்ளது})$$

$$A\hat{D}B = A\hat{D}C = 90^\circ \; (\text{அமைப்பு})$$

$$AD = AD \quad (\text{பொதுப் பக்கம்})$$

$$\therefore \Delta ABD \equiv \Delta ACD \; (\text{செ.ப.ப.})$$

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்

$$B\hat{A}D = C\hat{A}D$$

அதாவது AD ஆனது $B\hat{A}C$ இன் கோண இருசமகூறாக்கியாகும்

$B\hat{A}D = D\hat{A}C$ ஆகையால்

$$B\hat{D}A = C\hat{D}A = 90^\circ$$

$$\therefore BD = DC$$

அதாவது, AD ஆனது BC யின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியாகும்

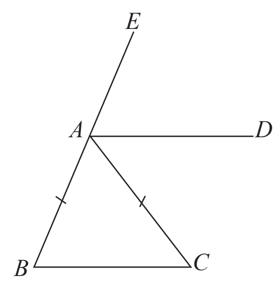
ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியின்

உச்சிக் கோணத்தின் கோண இருசமகூறாக்கியும்
உச்சியின் எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப் புள்ளியையும் உச்சியையும் தொடுக்கும் கோடும்
உச்சிக்கு எதிர்ப் பக்கத்தின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியும்
உச்சியிலிருந்து எதிர்ப் பக்கத்திற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தும் ஒன்றுடனொன்று பொருந்துகின்றன.

கேத்திரகணித ஏறிகளை சில சந்தர்ப்பங்களில் பல முறைகளில் நிறுவலாம். அத்தகைய ஒரு கேத்திரகணித ஏறியை இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$ ஆகும். பக்கம் BA ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. AD யின் மூலம் $C\hat{A}E$ ஆனது இருசமகூறிடுகின்றது. AD யும் BC யும் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமென நிறுவுக.



$AD // BC$ எனக் காட்டுவதற்கு ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடி ஒன்றை அல்லது ஒத்த கோணச் சோடி ஒன்றை சமமெனக் காட்டுவோம்.

நிறுவல்:

முறை (i)

முக்கோணி ABC யில்

$A\hat{B}C = A\hat{C}B$ ($AB = AC$)

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BA ஆனது E வரை நீட்டப்படுவதால்),

$E\hat{A}C = A\hat{B}C + A\hat{C}B$ (புறக் கோணத் தேற்றம்)

$E\hat{A}C = 2A\hat{C}B$ ($A\hat{B}C = A\hat{C}B$ ஆகையால்) ——— ①

$E\hat{A}C = E\hat{A}D + D\hat{A}C$ (அடுத்துள்ள கோணங்கள்)

$E\hat{A}D = D\hat{A}C$ (AD ஆனது $E\hat{A}C$ யை இருசமகூறிடுகின்றமையால்)

ஆகவே $E\hat{A}C = 2\,D\hat{A}C$ ——— ②

① , ② ஆகியவற்றிலிருந்து

$2\,A\hat{C}B = 2\,D\hat{A}C$

$A\hat{C}B = D\hat{A}C$ (இக்கோணச் சோடி ஒன்றுவிட்ட கோணங்களாகும்)

$\therefore BC // AD$

முறை (ii)

மேலேயுள்ள உருவில் $A\hat{B}C$ யும் $E\hat{A}D$ யும் சமன் எனக் காட்டலாம். ஆனால் இவை ஒத்த கோணச் சோடியாக இருப்பதனால் $BC // AD$ ஆகும் எனவும் நிறுவலாம்.

முறை (iii)

மேற்குறித்த நிறுவலை அட்சரகணிதக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

முக்கோணி ABC யில்

$A\hat{B}C = x$ எனக் கொள்வோம் ——— ①

$A\hat{B}C = A\hat{C}B$ ($AB = AC$ ஆகையால்)

$\therefore A\hat{C}B = x$

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BA ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டிருப்பதனால்,

$E\hat{A}C = A\hat{B}C + A\hat{C}B$ (புறக் கோணத் தேற்றம்)

$E\hat{A}C = x + x$

$= 2x$

$\therefore E\hat{A}D = x$ ($E\hat{A}C$ இன் இருசமகூறாக்கி AD ஆகையால்) ——— ②

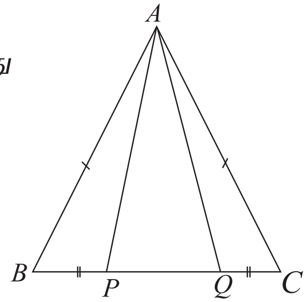
①,② இலிருந்து

$A\hat{B}C = E\hat{A}D$ ஆகும்.

ஆனால் இவை ஒத்த கோணங்கள் ஆகும். ஒத்த கோணங்கள் சமமாகையால் $AD//BC$

உதாரணம் 3

முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$ ஆகும். $BP = CQ$ ஆக இருக்குமாறு P , Q ஆகிய புள்ளிகள் பக்கம் BC மீது உள்ளன.



(i) $\Delta APB \equiv \Delta AQC$ எனவும்
(ii) $A\hat{P}Q = A\hat{Q}P$ எனவும் நிறுவுக.

நிறுவல்:

(i) ΔABP , ΔAQC ஆகியவற்றில்

$AB = AC$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{B}P = A\hat{C}Q$ ($AB = AC$ ஆகையால்)

$BP = CQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore \Delta ABP \equiv \Delta AQC$ (ப.கோ.ப)

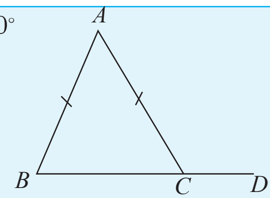
(ii) $\therefore \Delta ABP = \Delta AQC$ ஆகையால் $AP = AQ$ (ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள்)

உருவில் APQ முக்கோணியில் $A\hat{P}Q = A\hat{Q}P$ ($AP = AQ$ சமபக்கங்களின் எதிர்க் கோணங்கள்)

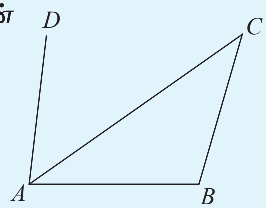
இருசமபக்க முக்கோணிகளுக்குரிய மேற்குறித்த தேற்றத்தையும் இதுவரை கற்ற ஏனைய தேற்றங்களையும் பயன்படுத்தி பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 9.2

1. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $A\hat{B}C + A\hat{C}D = 180^\circ$ என நிறுவுக.



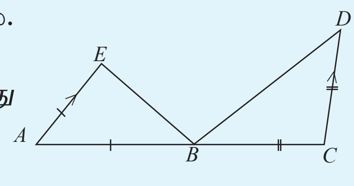
2. உருவில் $AB = BC$, $AD//BC$ ஆகும். $D\hat{A}B$ யின் இருசமகூறாக்கி AC என நிறுவுக.



3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் ABC ஒரு நேர்கோடாகும். அதில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) $B\hat{A}E + B\hat{C}D$ யின் பெறுமானம் யாது? உங்களது விடைக்கான காரணத்தைத் தருக.

(ii) $D\hat{B}E = 90^\circ$ எனக் காட்டுக.



4. ஒரு முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி D ஆகும். $BD = DA$ எனின், $B\hat{A}C$ ஆனது செங்கோணமென நிறுவுக.

5. முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$ ஆகும். பக்கம் AB மீது P யும், BC மீது Q வும் பக்கம் AC இன் மீது R உம் , $BP = CQ$, $BQ = CR$ ஆகுமாறு உள்ளன.
(i) இத்தகவல்கள் அடங்கிய ஒரு வரிப்படத்தை வரைக.
(ii) $\Delta PBQ \equiv \Delta QRC$ என நிறுவுக.
(iii) $Q\hat{P}R = Q\hat{R}P$ என நிறுவுக.

6. ஒரு முக்கோணி ABC யில் $\hat{B}$ ஆனது செங்கோணமாகும். AC ற்குச் செங்குத்தாக BD வரையப்பட்டுள்ளது. $CE = CB$ ஆக இருக்குமாறு AC இன்மீது ஒரு புள்ளி E உள்ளது.
(i) இத்தகவல்களை அடக்கிய ஒரு வரிப்படத்தை வரைக.
(ii) கோடு BE யினால் $A\hat{B}D$ இருசமகூறிடப்படுகின்றதென நிறுவுக.

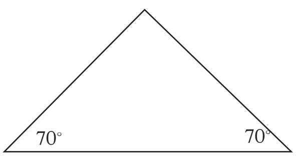
7. சமபக்க முக்கோணியின் அகக் கோணம் ஒன்றின் பெறுமானம் 60° எனக் காட்டுக.

9.3 இருசமபக்க முக்கோணித் தேற்றத்தின் மறுதலை

ஒரு முக்கோணியின் இரு கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்போது அக்கோணங்களின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமமாகுமா எனச் சோதித்துப் பார்ப்போம்.

செயற்பாடு

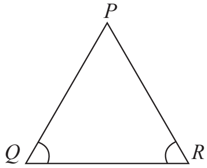
- ஏறத்தாழ 5 cm நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து, அதன் ஓர் அந்தத்தில் 70° கோணம் ஒன்றை பாகைமானியைப் பயன்படுத்திக் குறித்து வரைக.



- மற்றைய அந்தத்திலும் 70° கோணம் ஒன்றை வரைக.
- இரு பக்கங்களிலும் கோணங்களின் புயங்கள் இடைவெட்டுமாறு நீட்டுக.
- அப்போது இவ்வுருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு முக்கோணி கிடைக்கும்.
- அம்முக்கோணியை வெட்டி வேறுபடுத்திச் சம கோணங்கள் ஒன்றோடொன்று பொருந்துமாறு மடிக்க.
- இப்போது முக்கோணியின் சம பக்கங்களை இனங் காண்க.
- சம கோணங்களின் எதிர்ப் பக்கங்கள் பற்றிக் கூறத்தக்க சிறப்பியல்பு யாது?
- இவ்வாறு கோணத்தை மாற்றிக் கொண்டு பல்வேறு முக்கோணிகளை வெட்டி எடுத்து, மேற்குறித்த இயல்பு இருக்கின்றதாவெனப் பார்க்க.

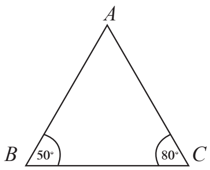
மேற்குறித்த செயற்பாட்டிலிருந்து பெற்ற பேறு பொதுவாக உண்மையாக இருப்பதுடன் அது ஒரு தேற்றமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் : (இருசமபக்க முக்கோணித் தேற்றத்தின் மறுதலை)
யாதாயினும் ஒரு முக்கோணியின் இரு கோணங்கள் சமமெனின், அச்சம கோணங்களின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமமாகும்.



தேற்றத்திற்கேற்ப முக்கோணி PQR யில்
$P\hat{Q}R = P\hat{R}Q$ ஆக இருக்கும்போது $PR = PQ$ ஆகும்.

உதாரணம் 1



உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யில் சம பக்கச் சோடியைக் காண்க.

முக்கோணி ABC யில்

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$\hat{A} + 50^\circ + 80^\circ = 180^\circ$

$\hat{A} = 180^\circ - (50^\circ + 80^\circ)$

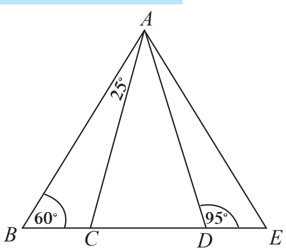
$= 180^\circ - 130^\circ$

$= 50^\circ$

$\hat{A} = \hat{B}$

$AC = BC$ (இரு சமபக்க முக்கோணியின் தேற்றத்தின் மறுதலை)

உதாரணம் 2



உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $AC = AD$ எனக் காட்டுக.

முக்கோணி ABC யைக் கருதும்போது

$A\hat{C}D = A\hat{B}C + B\hat{A}C$ (புறக்கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$= 60^\circ + 25^\circ$

$= 85^\circ$

CDE ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்

$A\hat{D}C + A\hat{D}E = 180^\circ$ (ஒருகோட்டில் அடுத்துள்ள கோணங்கள்)

$A\hat{D}C = 180^\circ - 95^\circ$

$= 85^\circ$

முக்கோணி ACD யில்

$A\hat{C}D = 85^\circ$

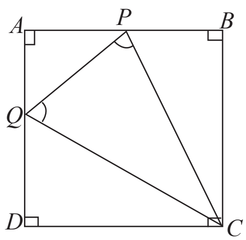
$A\hat{D}C = 85^\circ$

$A\hat{C}D = A\hat{D}C$

$AC = AD$ (சம கோணங்களின் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

உதாரணம் 3

சதுரம் $ABCD$ யில் AB இன்மீது P யும் , AD இன்மீது Q வும் $Q\hat{P}C = P\hat{Q}C$ ஆக இருக்குமாறு உள்ளன. $BP = QD$ என நிறுவுக.



முக்கோணி PQC யில்,

$Q\hat{P}C = P\hat{Q}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore QC = PC$ (சம கோணங்களின் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

PBC , DQC ஆகிய முக்கோணிகளில்

$P\hat{B}C = Q\hat{D}C = 90^\circ$ (சதுரத்தின் உச்சிக் கோணங்கள்)

$BC = DC$ (சதுரத்தின் பக்கங்கள்)

$CP = CQ$ (நிறுவப்பட்டது)

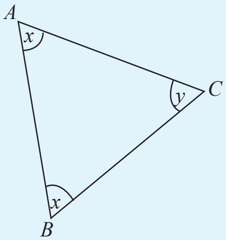
$\therefore \Delta PBC \equiv \Delta DQC$ (செ.ப.ப)

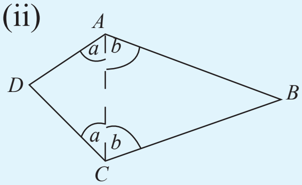
ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்

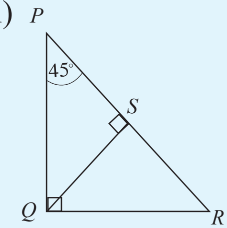
$\therefore BP = QD$

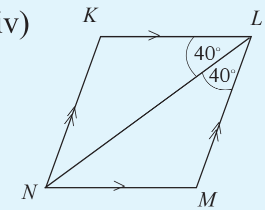
பயிற்சி 9.3

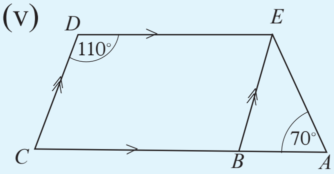
1. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப இருசமபக்க முக்கோணிகளைத் தெரிந்தெடுக்க.

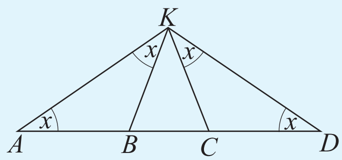
(i) 

(ii) 

(iii) 

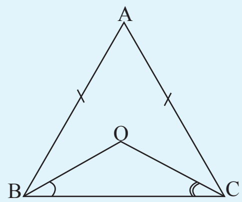
(iv) 

(v) 

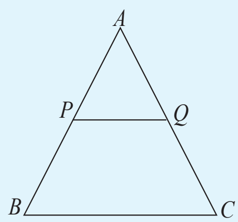
(vi) 

2. முக்கோணி ABC யில் $A\hat{B}C = B\hat{C}A = B\hat{A}C$ எனின், ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணியென நிறுவுக.

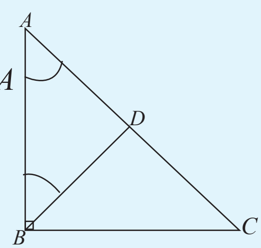
3. உருவில் $AB = AC$ ஆகும். $A\hat{B}C$ யினதும், $A\hat{C}B$ யினதும் இருசமகூறாக்கிகள் O விற் சந்திக்கின்றன. BOC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியென நிறுவுக.



4. உருவில் $AB = AC$, $BC//PQ$ ஆகும்.
(i) $AP = AQ$ எனவும்
(ii) $BP = CQ$ எனவும்
நிறுவுக



5. உருவில் பக்கம் AC இன் மீது புள்ளி D ஆனது $B\hat{A}D = D\hat{B}A$ ஆகுமாறு உள்ளது.
(i) $D\hat{B}C = D\hat{C}B$ எனவும்
(ii) AC யின் நடுப்புள்ளி D எனவும்
நிறுவுக.

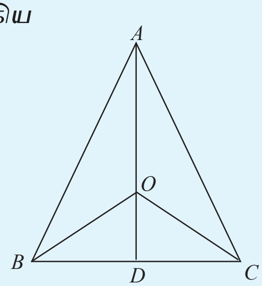


6. முக்கோணி ABC யில் $\hat{B}$ யினதும் $\hat{C}$ யினதும் இருசமகூறாக்கிகள் BC யிற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு PQ வை R இற் சந்திக்கின்றன.
(i) $PB = PR$ எனவும்
(ii) $PQ = PB + QC$ எனவும்
நிறுவுக.

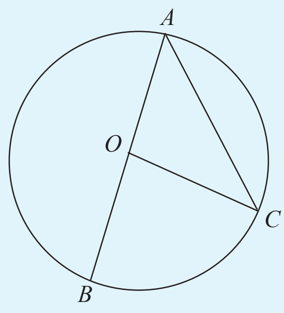
7. முக்கோணி ABC இல் $A\hat{C}B = A\hat{B}P$ ஆகுமாறு புள்ளி P ஆனது AC இன் மீது உள்ளது. $P\hat{B}C$ யின் இருசமகூறாக்கி பக்கம் AC யை Q இற் சந்திக்கின்றது. $AB = AQ$ என நிறுவுக.

8. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = SR$ ஆகும். நீளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று சமமான PR, QS ஆகிய மூலைவிட்டங்கள் T யில் இடைவெட்டுகின்றன.
(i) $\Delta PQR = \Delta SQR$ எனவும்
(ii) $QT = RT$ எனவும்
நிறுவுக.

9. முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$ ஆகும். $A\hat{B}C$,$A\hat{C}B$ ஆகிய கோணங்களின் இரு கூறாக்கிகள் O வில் சந்திக்கின்றன.
(i) BOC ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணி எனவும்
(ii) $\Delta AOB \equiv \Delta AOC$ எனவும்
(iii) AD ஆனது BC யிற்கு செங்குத்து எனவும்
நிறுவுக.



10. O வை மையமாக் கொண்ட ஒரு வட்டம் உருவிற் காணப்படுகின்றது. $B\hat{O}C = 2B\hat{A}C$ என நிறுவுக.



10 நேர்மாறு விகிதசமன்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- நேர்மாறு விகிதசமன்களுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்க்கத் தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

விகிதங்கள்

விகிதங்கள், நேர் விகிதசமன்கள் என்பன பற்றி முன்னர் கற்ற விடயங்களை நினைவு கூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

மீட்டற் பயிற்சி

1. விகிதசமமாக இருப்பதற்கு ஒவ்வொரு வெற்றுக் கட்டத்திற்கும் பொருத்தமான எண்ணைக் காண்க.

(i) $5 : 2 = 20 : \square$ (ii) $2 : 3 = \square : 15$

(iii) $4 : \square = 20 : 25$ (iv) $\square : 4 = 60 : 80$

2. ஒரு போக்குவரத்துச் சேவையில் ஈடுபடுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வாகனத்தின் தினசரி வருமானம் ரூ. 6 000 உம் செலவு ரூ. 4 500 உம் ஆகும். வாகனத்தின் தினசரி வருமானத்திற்கும் செலவுக்குமிடையே உள்ள விகிதத்தை மிக எளிய வடிவத்தில் தருக.

3. தரையின் நீளம் 1000 m ஆனது 2 cm இனால் வகைகுறிக்கப்படுமாறு வரையப்பட்ட ஓர் அளவிடை வரிப்படத்தின் அளவிடையை ஒரு விகிதமாகத் தருக.

4. புவிமீது உள்ள புவியீர்ப்பினாலான விசை சந்திரனின்மீது உள்ளதன் ஆறு மடங்காகும். ஆகவே, சந்திரனின்மீது உள்ள ஒரு பொருளின் நிறைக்கும் புவி மீது அப்பொருளின் நிறைக்குமிடையே உள்ள விகிதம் $1 : 6$ ஆகும். புவி மீது 540 N ஆகவுள்ள விண்வெளிப் பயணி ஒருவருடைய நிறை சந்திரனின் மீது யாது?

5. சீமெந்துமணற் சாந்து ஒன்றைத் தயாரிப்பதற்கு அவை $1 : 6$ என்னும் விகிதத்தில் கலக்கப்படுகின்றன.

(i) அத்தகைய ஒரு கலவையில் சீமெந்து என்ன பின்னத்தில் உள்ளது?

(ii) 18 தாச்சி மணலுடன் கலக்க வேண்டிய சீமெந்துத் தாச்சிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) ஒரு பக்கெற்றுச் சீமெந்தில் 5 தாச்சி சீமெந்து இருக்கின்றது. அத்தகைய ஒரு பக்கெற்றுச் சீமெந்தை முற்றாகப் பயன்படுத்தி ஒரு சாந்துக் கலவையைத் தயாரிக்க வேண்டுமெனின் , அதனுடன் எத்தனை தாச்சிகள் மணல் சேர்க்கப்பட வேண்டும்?
(iv) சாந்துக் கலவையின் 70 தாச்சிகளைத் தயாரிக்கத் தேவையான சீமெந்தின் அளவையும் மணலின் அளவையும் தனித்தனியாகக் காண்க.

10.1 நேர்மாறு விகிதசமன்

இரு கணியங்களில் ஒரு கணியம் ஒரு குறித்த விகிதத்திற்கு அதிகரிக்கும்போது மற்றைய கணியமும் அவ்விகிதத்திற்கு அதிகரிக்குமெனின் அல்லது ஒரு கணியம் ஒரு குறித்த விகிதத்திற்குக் குறையும்போது மற்றைய கணியமும் அவ்விகிதத்திற் குறையுமெனின், அப்போது அவ்விரு கணியங்களுக்குமிடையே **நேர்** (நேரடி) **விகிதசமம்** என நாம் அறிவோம். இரு கணியங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதம் ஒரு கணியம் ஒரு குறித்த விகிதத்திற்கு அதிகரிக்கும்போது மற்றைய கணியம் அவ்விகிதத்திற் குறைதல் அல்லது ஒரு கணியம் குறித்த விகிதத்திற்குக் குறையும்போது மற்றைய கணியம் அவ் விகிதத்திற்கு அதிகரித்தல் **நேர்மாறு முறை விகிதசமத்தில்** நடைபெறும் எனப்படும்.

பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் இதனை மேலும் நன்றாக உறுதிப்படுத்துவோம்.

ஒரு விடுதியில் உள்ள 12 பேருக்கு 4 நாட்களுக்குப் போதுமான உணவு சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) விடுதியில் இருப்போரின் எண்ணிக்கை 15 எனின், அவ்வுணவு 4 நாட்களுக்குப் போதுமானதா?
(ii) விடுதியில் இருப்போரின் எண்ணிக்கை 6 எனின், அவ்வுணவு எத்தனை நாட்களுக்குப் போதுமானது?
(iii) விடுதியில் இருப்போரின் எண்ணிக்கை குறையும்போது அவ்வுணவு போதுமான நாட்களின் எண்ணிக்கை குறையுமா? கூடுமா?
(iv) விடுதியில் உள்ள 12 பேருக்கு 4 நாட்களுக்குப் போதுமான இவ்வுணவு ஒருவருக்கு எத்தனை நாட்களுக்குப் போதுமானது?

விடுதியில் உள்ள 12 பேருக்கு 4 நாட்களுக்குப் போதுமான உணவு 6 பேருக்கு 8 நாட்களுக்குப் போதுமானது எனவும் ஒருவருக்கு 48 நாட்களுக்குப் போதுமானது எனவும் நாம் மேற்குறித்த விடயங்களை ஆராயும்போது அறிய முடிகின்றது. விடுதியில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கைக்கும் போதுமான நாட்களின் எண்ணிக்கைக்குமிடையே பின்வரும் தொடர்புடைமைகள் இருப்பதை எளிதாக அவதானிக்கலாம்.

விடுதியில் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை	**நாட்களின் எண்ணிக்கை**
12	4
(8)	6
6	8
(4)	12
2	24
1	48

இத்தொடர்புடைமை விகிதமாக இருப்பதற்கு விடுதியில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கைகளுக்க்கிடையே உள்ள விகிதம் அதனை ஒத்த நாட்களின் எண்ணிக்கைகளுக்கிடையே உள்ள விகிதத்திற்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். மேற்குறித்த அட்டவணையில் விடுதியில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கைகள் 8, 2 ஆகவுள்ள இரு சந்தர்ப்பங்களையும் கவனிப்போம்.

விடுதியில் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கைகளுக்கிடையே உள்ள
விகிதம் $= 8 : 2 = 4 : 1$
விடுதியில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கையை ஒத்த நாட்களின் எண்ணிக்கை 6 இலிருந்து 24 இற்கு அதிகரித்துள்ளது. அந்நாட்களின் எண்ணிக்கைகளுக்கிடையே உள்ள விகிதம் $= 6 : 24 = 1 : 4$

இவ்விகிதங்கள் சமனல்ல ஆகையால், விடுதியில் உள்ள மனிதரின் எண்ணிக்கைக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கைக்குமிடையே நேர் விகிதம் இல்லை. எனினும் ஒரு விகிதத்தின் இரு பெறுமானங்களையும் இடம் மாற்றினால் இரு விகிதங்களும் சமமாகும்.
அப்போது விடுதியில் உள்ள மனிதர்களின் எண்ணிக்கைகளுக்கிடையே உள்ள
விகிதம் $= 8 : 2 = 4 : 1$
அதனை ஒத்த நாட்களின் இரு எண்ணிக்கைகளை இடம் மாற்றும்போது
விகிதம் $= 24 : 6 = 4 : 1$

இத்தகைய ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் விடுதியில் உள்ள மனிதர்களின் எண்ணிக்கைக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கைக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை **நேர்மாறு விகிதசமம்** எனப்படும்.

மேற்குறித்த மனிதர்களின் எண்ணிக்கைக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கைக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமையில் வேறு இரு சந்தர்ப்பங்களைப் பார்ப்போம்.

விடுதியில் உள்ள மனிதர்களின் எண்ணிக்கை	**நாட்களின் எண்ணிக்கை**
12	4
1	48

விடுதியில் உள்ள மனிதரின் எண்ணிக்கைகளுக்கிடையே உள்ள விகிதம் = 12 : 1
அதனை ஒத்த நாட்களின் எண்ணிக்கைகளை இடம் மாற்றும்போது அவற்றுக்கிடையே உள்ள விகிதம் = 48 : 4 = 12 : 1

எல்லா இரு சந்தர்ப்பங்களுக்கும் நேர்மாறுமுறை விகிதசமத் தொடர்புடைமை இருத்தல் வேண்டும். இத்தகைய நேர்மாறுமுறைத் தொடர்புடைமைகளுக்கு மேலும் இரு உதாரணங்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

(i) ஒரே பணியைச் செய்து முடிப்பதற்கு ஈடுபடுத்தப்படும் மனிதர்களின் எண்ணிக்கையும் அவர்களுக்கு எடுக்கும் நேரமும்.

(ii) ஒரு குறித்த மாறாத் தூரத்திற்குச் செல்வதற்கு ஒரு வாகனம் செல்லும் கதியும் அக்கதியில் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரமும்.

இப்போது பின்வரும் உதாரணங்களில் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

உதாரணம் 1

ஒரு குறித்த வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு 5 மனிதர்கள் 8 நாட்கள் எடுக்கின்றனர். 10 மனிதர்களுக்கு அவ்வேலையை முடிக்க எடுக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
இப்பிரசினம் தீர்க்கப்படத்தக்க இரு முறைகளில் கவனஞ் செலுத்துவோம். இப்பிரசினத்தில் நேர்மாறு விகிதசமம் உள்ளது.

முறை 1

10 மனிதர்கள் எடுக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கையை x எனக் கொள்வோம். அப்போது இது நேர்மாறு விகிதசமத்தில் அமைந்துள்ளதால்

$$5 : 10 = x : 8$$
$$\frac{5}{10} = \frac{x}{8}$$
$$10x = 8 \times 5$$
$$= 40$$
$$\therefore x = 40 \div 10$$
$$= 4$$

$\therefore$ 10 மனிதர்களுக்கு எடுக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கை 4 நாட்கள் ஆகும்.

முறை 2

வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு 5 மனிதர்கள் எடுக்கும் காலம் = 8 நாட்கள்
ஒரு மனிதன் எடுக்கும் காலம் = 8 × 5
= 40 நாட்கள்

$\therefore$ 10 மனிதர்களுக்கு எடுக்கும் காலம் = 40 ÷ 10 நாட்கள்
= 4 நாட்கள்

குறிப்பு: மேற்குறித்த உதாரணங்களில் குறிப்பிட்ட வேலையைச் செய்வதற்கு ஒரு மனிதன் எடுக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கை 40 என்னும் பெறுமானம் அவ்வேலையின் அளவை அளப்பதற்கு ஓர் அளவீடாக எடுக்கப்படலாம். அது **மனித நாட்களின் எண்ணிக்கை** எனப்படும்.

வேலையின் அளவு = வேலையை செய்து முடிப்பதற்கு ஒரு மனிதனுக்கு எடுக்கும் காலம்
= மனிதர்களின் எண்ணிக்கை × நாட்களின் எண்ணிக்கை

இதற்கேற்ப இவ்வேலையின் அளவு 40 மனித நாட்களெனக் காட்டலாம்.

உதாரணம் 2

ஒரு குறித்த வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு 5 மனிதர்கள் 8 நாட்கள் எடுக்கின்றனர் அவ்வேலையை 2 நாட்களில் செய்து முடிப்பதற்கு எத்தனை மனிதர்களை ஈடுபடுத்த வேண்டும்?

5 மனிதர்கள் வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு எடுக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கை = 8

∴ஒரு மனிதன் எடுக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கை = 8 × 5

∴ வேலையின் அளவு = 8 × 5 மனித நாட்கள்
= 40 மனித நாட்கள்

∴ 2 நாட்களில் செய்து முடிப்பதற்கு தேவையான மனிதர்களின் எண்ணிக்கை $= \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \times 5}{\underset{1}{\cancel{2}}}$

= 20

உதாரணம் 3

ஒரு வேலைத்தளச் சேவையில் ஈடுபடும் 40 பேரைக் கொண்ட ஒரு குழுவிற்கு 12 நாட்களுக்குப் போதுமான உணவு சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆறு நாட்களுக்குப் பின்னர் குழுவில் மேலும் 8 பேர் சேர்ந்தால், எஞ்சியிருக்கும் உணவு மேலும் எத்தனை நாட்களுக்குப் போதுமானது?

40 பேருக்கு 12 நாட்களுக்குப் போதுமான உணவு அந்த 40 பேருடன் 6 நாட்களுக்குப் பின்னர் சேர்ந்த 8 பேருடன் 48 பேருக்கு மேலும் சில நாட்களுக்குப் போதுமானதாகும்.

இப்பிரசினம் தீர்க்கப்படத்தக்க இரு முறைகளில் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

முறை 1

1 மனிதனுக்கு இவ்வுணவு போதுமான நாட்கள் $= 40 \times 12$
$= 480$
பயன்படுத்தப்பட்ட உணவின் அளவு $= 40 \times 6$
$= 240$
எஞ்சியுள்ள உணவின் அளவு $= 480 - 240$
$= 240$
48 மனிதர்களுக்கு இவ்வுணவு
போதுமான நாட்கள் $= 240 \div 48$
$= 5$ நாட்கள்

$\therefore$ எஞ்சியுள்ள உணவு மேலும் 5 நாட்களுக்குப் போதுமானதாகும்.

முறை 2

6 நாட்களுக்குப் பின்னர் 48 பேருக்கு உணவு போதுமான நாட்களின் எண்ணிக்கையை x எனக் கொள்வோம். 40 பேருக்கு 12 நாட்களுக்குப் போதுமான உணவின் அளவை 40 பேருக்கு 6 நாட்களுக்கும் 48 பேருக்கு x நாட்களுக்கும் போதுமான உணவின் அளவுகளின் மொத்தத்திற்குச் சமப்படுத்தலாம்.

$$\therefore 40 \times 12 = (40 \times 6) + (48 \times x)$$
$$480 = 240 + 48x$$
$$48x = 480 - 240$$
$$= 240$$
$$\therefore x = \frac{240}{48}$$
$$= 5$$

$\therefore$ எஞ்சியுள்ள உணவு போதுமான நாட்களின் எண்ணிக்கை 5 நாட்கள் ஆகும்.

பயிற்சி 10.1

1. பின்வரும் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள சந்தர்ப்பத்திற்கு (a), (b), (c) ஆகியவற்றில் பொருத்தமான விடையைத் தெரிந்தெடுத்துக் கூற்றுக்கு எதிரே அடைப்புக்குறிகளுக்குள்ளே எழுதுக.

(a) விகிதசமமன்று (b) நேர் விகிதசமம் (c) நேர்மாறு விகிதசமம்

(i) ஒரு முகாமில் உள்ள போர் வீரர்களின் எண்ணிக்கையும் அவர்களுக்குச் சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ள உணவின் அளவும் (...)

(ii) ஒரு வட்டத்தின் ஆரையும் பரப்பளவும் (...)

(iii) சீரான கதியில் ஒரு வாகனம் செல்லும் தூரமும் அதற்கு எடுக்கும் நேரமும் (...)

(iv) பரப்பளவு மாறிலியாகவுள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் (...)

(v) சீனியை வாங்குவதற்குக் கடைக்குச் செல்லும் ஒருவர் வாங்கும் சீனியின் அளவும் அதற்குச் செலவிடப்படும் பணமும் (...)

2. 8 மனிதர்கள் ஒரு குறித்த வேலையைச் செய்வதற்கு 9 நாட்கள் எடுக்கின்றனர்.

(i) ஒரு மனிதன் அவ்வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு எடுக்கும் காலம் எத்தனை நாட்கள்?

(ii) அவ்வேலையின் அளவு எத்தனை மனித நாட்கள்?

(iii) அவ்வேலையில் 12 மனிதர்களை ஈடுபடுத்தினால் அவர்கள் எத்தனை நாட்களில் அவ்வேலையைச் செய்து முடிப்பர்?

3. ஒரு தோட்டத்தை முற்றாகத் துப்புரவாக்குவதற்கு 10 மனிதர்கள் 8 நாட்கள் எடுப்பரெனக் காணி உரிமையாளர் மதிப்பிட்டுள்ளார். தொடக்கத்தில் இப்பணியில் 12 மனிதர்கள் வீதம் 2 நாட்களுக்கு ஈடுபடுத்தப்பட்டனர்.

(i) முழு வேலையினதும் அளவு எத்தனை மனித நாட்கள் ?

(ii) முதல் இரு நாட்களின் இறுதியில் எவ்வளவு வேலை செய்து முடிக்கப்பட்டிருக்கும்?

(iii) 6 நாட்களில் முழு வேலையும் செய்து முடிப்பதற்குக் காணி உரிமையாளர் எதிர்பார்த்திருந்தால் , எஞ்சியுள்ள நான்கு நாட்களுக்கும் புதிதாக எத்தனை மனிதர்களை ஈடுபடுத்த வேண்டும்?

4. ஒரு விவசாயப் பண்ணையில் இருக்கும் 12 பசுக்களுக்கு 10 நாட்களுக்குப் போதுமான உணவு உள்ளது . இரு நாட்களுக்குப் பின்னர் மேலும் நான்கு பசுக் கள் புதிதாக வாங்கப்பட்டு அப்பண்ணையில் சேர்க்கப்பட்டன.

(i) சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ள உணவு ஒரு பசுவுக்கு எத்தனை நாட்களுக்குப் போதுமானதாகும்?

(ii) பசுக்களின் எண்ணிக்கை அதிகரித்தமையால் சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ள உணவு எத்தனை நாட்களால் குறைவடையும்?

5. ஒரு பயிற்சி முகாமில் 24 பயிற்சி பெறுனர்களுக்கு 8 நாட்களுக்குத் தேவையான உணவு சேமித்து வைக்கப்பட்டிருந்தது. முகாம் ஆரம்பிக்கப்பட்டு 2 நாட்களுக்குப் பின்னர் 6 பயிற்சி பெறுநர்கள் நோய்வாய்ப்பட்டமையால் முகாமைவிட்டுச் சென்றனர். எஞ்சியிருந்த உணவு குறித்த நாட்களின் எண்ணிக்கையிலும் பார்க்க மேலும் 2 நாட்களுக்குப் போதுமானதெனக் காட்டுக.

6. மூன்று ஒத்த பம்பிகள் மூலம் 4 மணித்தியாலத்தில் ஒரு நீர்த் தடாகத்தை வெறிதாக்கலாம். அம்மூன்று பம்பிகளையும் பயன்படுத்தித் தடாகத்தை வெறிதாக்கும்போது சரியாக ஒரு மணித்தியாலம் கழித்த பின்னர் ஒரு பம்பி தொழிற்படத் தவறியது. எஞ்சியுள்ள இரு பம்பிகளின் மூலமும் தடாகத்தை வெறிதாக்கும் பணி நிறைவேற்றப்பட்டது. ஒரு பம்பி தொழிற்படத் தவறியமையால் கூடுதலாக எடுத்த காலத்தைக் காண்க.

7. 40 km h^{-1} கதியில் செல்லும் ஒரு வாகனதிற்கு குறித்த ஒரு பயணத்திற்கு அரை மணித்தியாலம் எடுக்கின்றது. அவ்வாகனம் 50 km h^{-1} கதியில் சென்றால், அப்பயணத்திற்கு எடுக்கும் நேரத்தை நிமிடங்களில் காண்க.

8. 4 மனிதர்கள் செய்து முடிப்பதற்குக் கையேற்ற ஒரு வேலையின் ஒரு நாளுக்கு 6 மணித்தியாலம் வீதம் மூன்று நாட்களுக்கு வேலை செய்த பின்னர் $\frac{2}{3}$ ஐ மாத்திரம் செய்து முடிக்கத்தக்கதாக இருந்தது.
(உதவி :மனித மணித்தியாலம் = மனிதர்களின் எண்ணிக்கை × நாட்களின் எண்ணிக்கை × ஒரு நாளில் வேலை செய்த மனித மனித்தியாலங்கள்)

(i) முழு வேலையினதும் அளவு எத்தனை மனித மணித்தியாலங்கள்?
(ii) அவர்கள் நால்வரும் சேர்ந்து அடுத்த நாள் அவ்வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு எதிர்பார்க்கின்றனர். அதற்காக அத்தினத்தில் எத்தனை மணித்தியாலங்கள் மேலதிகமாக வேலை செய்ய நேரிடும்?

10.3 நேர்மாறு விகிதசமத்தை அட்சரகணித வடிவத்தில் காட்டல்

ஒரு குறித்த வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு 8 மனிதர்கள் 1 நாள் எடுத்தால்,

- நான்கு மனிதர்கள் இரண்டு நாட்கள் எடுப்பர்.
- இரண்டு மனிதர்கள் ஈடுபடுத்தப்பட்டால் நான்கு நாட்கள் தேவை .
- ஒரு மனிதன் மாத்திரம் ஈடுபட்டால் வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு எட்டு நாட்கள் எடுக்கும்.

இந்நான்கு சந்தர்ப்பங்களிலும் மனிதர்களின் எண்ணிக்கையினதும் நாட்களின் எண்ணிக்கையினதும் பெருக்கம் ஒரு மாறிலியாகும்.
மனிதர்களின் எண்ணிக்கை × நாட்களின் எண்ணிக்கை = ஒரு மறாப் பெறுமானம்.

இம்மாறாப் பெறுமானம் வேலையின் அளவாகும். அவ்வேலையின் அளவு அளக்கப்படும் அலகை மனித நாட்கள் என எடுக்கலாம். இதற்கேற்ப மனிதர்களின் எண்ணிக்கை x ஆகவும் நாட்களின் எண்ணிக்கை y ஆகவும் இருக்கும்போது

$$xy = k \quad (k \text{ ஒரு மாறிலி})$$

$$x = \frac{k}{y}$$

அதாவது,
நேர் விகிதசமத்தின் வரைவிலக்கணத்திற்கேற்ப இதனை $x \propto \frac{1}{y}$ எனக் காட்டலாம். அதாவது x உம் $\frac{1}{y}$ உம் நேரடி விகிதசமமாகும். வேறு விதமாகக் கூறும்போது x உம் y யும் நேர்மாறு விகிதசமமாகும்.

உதாரணம் 1

8 மனிதர்கள் 9 நாட்களில் ஒரு வேலையைச் செய்து முடிக்கலாம். ஆயினும் அவ்வேலைக்காக 6 மனிதரை மாத்திரம் ஈடுபடுத்த முடிந்தது. அதனை முடிக்க எத்தனை நாட்கள் எடுக்கும்?

மனிதனின் எண்ணிக்கையை x மூலமும் நாட்களின் எண்ணிக்கையை y மூலமும் காட்டுவோம். அப்போது $xy = k$ என்னும் சமன்பாட்டில் உள்ள தரவுகளின்படி

$8 \times 9 = k$

$6y = k$ என்னும் சமன்பாடுகள் பெறப்படும்.

ஒரே வேலை என்பதால் மாறிலி k ஆனது மாறாது. இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் மாறிலி k ஐ நீக்கும்போது.

$$8 \times 9 = 6y$$

$$\text{அதாவது}, y = \frac{8 \times 9}{6}$$

$$= 12$$

$\therefore$ 6 மனிதர்களை ஈடுபடுத்தினால் அவ்வேலையை செய்துமுடிக்க 12 நாட்கள் எடுக்கும்.

உதாரணம் 2

குறித்த ஒரு வேலையை 9 நாட்களில் செய்து முடித்த ஒரு குழுவினர் அவ்வாறான வேறொரு வேலையைச் செய்வதற்காக மேலும் 3 மனிதரை குழுவில் சேர்த்துக் கொண்டனர். இவ்வேலையை 6 நாட்களில் முடிக்கக் கூடியதாயிருந்ததாயின் முதற் குழுவிலிருந்த மனிதர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

முதற் குழுவிலிருந்த மனிதர்களின் எண்ணிக்கை x எனக் கொள்ளும்போது,

தரப்பட்டுள்ள தரவுகளின் படி,

$x \times 9 = k$

$(x+3) \times 6 = k$ என்னும் சமன்பாடு பெறப்படும்.

இதிலிருந்து $9x = 6(x+3)$

$$\therefore 9x = 6x + 18$$

$$3x = 18$$

$$\therefore x = 6$$

எனவே குழுவிலிருந்த மனிதர்களின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும்.

பயிற்சி 10.2

1. ஒரு குறித்த வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்கு 5 மனிதர்களுக்கு 4 நாட்கள் தேவைப்பட்டன. அவ்வேலையை 4 மனிதர்கள் எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பர்.

2. ஒரு நாளைக்கு 5 மணித்தியாலம் வீதம் வேலை செய்து 4 நாட்களில் ஒரு காணியைத் துப்புரவாக்கி முடிப்பதற்கு 10 மனிதர்களை ஈடுபடுத்த நேரிட்டது.

(i) நான்கு நாட்களிலும் ஒரு மனிதன் வேலை செய்யும் மணித்தியாலங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை யாது ?

(ii) அவ்வேலையின் அளவு எத்தனை மனித மணித்தியாலங்கள் ?

3. 18 மனிதர்கள் 6 நாட்களில் செய்து முடிக்கத்தக்க வேலையின் இரு மடங்கான ஒரு வேலையை 9 நாட்களில் செய்து முடிப்பதற்கு எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது.

(i) தொடக்க வேலையின் அளவு எத்தனை மனித நாட்கள் ?

(ii) இரண்டாவது வேலையின் அளவு எத்தனை மனித நாட்கள் ?

(iii) இரண்டாவது வேலையை 9 நாட்களில் செய்து முடிப்பதற்கு ஈடுபடுத்த வேண்டிய மனிதர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

11 தரவுகளை வகைகுறித்தல்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு வட்ட வரைபை வரைவதற்கும்
- வட்ட வரைபைக் கொண்டு தகவல்களைப் பெறுவதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

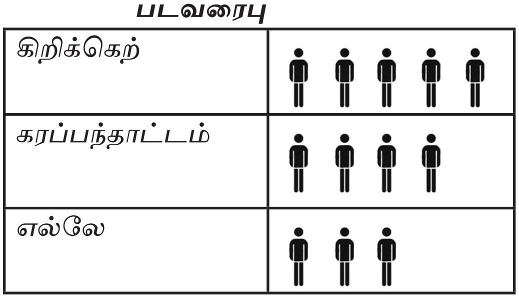
வட்ட வரைபின் மூலம் தரவுகளை வகைகுறித்தல்

ஒரு பாடசாலையின் தரம் 10 இன் மாணவர்களிடம் கிறிக்கெற், கரப்பந்தாட்டம், எல்லே என்னும் விளையாட்டுகளில் அவர்கள் மிகவும் விரும்பும் விளையாட்டைப் பற்றிச் சேகரித்த தகவல்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

விளையாட்டு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
கிறிக்கெற்	25
கரப்பந்தாட்டம்	20
எல்லே	15

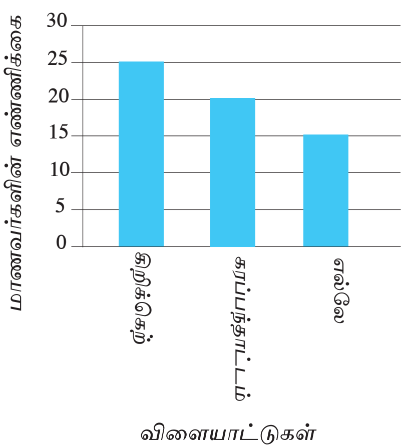
மேற்குறித்த தகவல்களை ஒரு படவரைபினாலும் சலாகை வரைபினாலும் பின்வருமாறு வகைகுறிக்கலாம்

படவரைபு



அளவிடை :  என்பது 5 பிள்ளைகளைக் குறிக்கின்றது

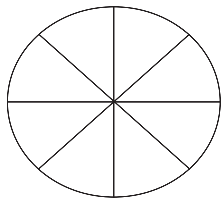
சலாகை வரைபு



சலாகை வரைபில் ஒவ்வொரு விளையாட்டிலும் விருப்பமுள்ள மாணவர் எண்ணிக்கை நிரலின் உயரத்தினால் காட்டப்படுகின்றது. பட வரைபில் விளையாட்டில் விருப்பமான மாணவர் எண்ணிக்கை  உருவினால் காட்டப்படுகின்றது.

படவரைபையும் சலாகை வரைபையும் போன்று தரவுகளை வகைகுறிக்கும் வேறொரு முறை வட்டவரைபாகும்.

வட்டவரைபின் மூலம் தரவுகளை வகைகுறிக்கும்போது மொத்தத் தரவுகளின் எண்ணிக்கை ஒரு வட்டத்தின் முழுப் பிரதேசத்திலும் (பரப்பளவினால்) காட்டப்படுகின்றது. தரவுகளின் உப பகுதிகள் அவ்வட்டத்தின் தரவு எண்ணிக் கைக்கு ஒத்த ஆரைச்சிறையினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. இனி ஆரைச்சிறைகளைக் காண்பது பற்றிக் கருதுவோம்.



உதாரணமாக,
உருவிலுள்ள வட்டத்தைக் கருதுவோம். அது சமமான 8 ஆரைச்சிறைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு பகுதியின் பரப்பளவு வட்டத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{8}$ பங்கு ஆகும். அப்போது மையத்தைச் சுற்றி உள்ள கோணமும் 8 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது.

ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி உள்ள கோணம் 360° ஆகும். ஆகவே, ஓர் ஆரைச்சிறையின் கோணம் மையத்தைச் சுற்றி உள்ள கோணத்தின் $\frac{1}{8}$ பங்கு ஆகும். அதாவது 360° இன் $\frac{1}{8}$ ஆகும்.

ஆகவே வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ ஐக் காட்டும் ஆரைச்சிறையின் கோணம் $= 360^\circ \times \frac{1}{8}$

$= 45^\circ$

அவ்வாறே வட்டத்தின் $\frac{3}{8}$ ஆன ஆரைச்சிறையின் கோணம் $= 360^\circ \times \frac{3}{8}$

$= 135^\circ$

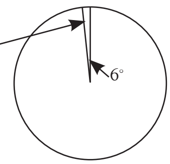
இனி மேற்குறித்த அட்டவணையிலுள்ள தரவுகளைக் காட்டுவதற்குப் பொருத்தமான ஒரு வட்டவரைபை வரைவோம்.

முதலில் பொருத்தமான ஆரையுள்ள (3 cm போதுமானது) ஒரு வட்டத்தை வரைவோம். அவ்வட்டத்தின் மையத்தைச் சுற்றி உள்ள கோணமாகிய 360° இற்கு ஒத்த பரப்பளவாகிய முழுப் பரப்பளவினால் 60 மாணவர்களைக் காட்டுவோம்.

அப்போது ஒரு மாணவனை வகைகுறிக்கும் மையக் கோணம் $= 360^\circ \times \frac{1}{60}$

$= 6^\circ$

ஒரு மாணவனை வகைகுறிக்கும் ஆரைச்சிறையின் கோணம்

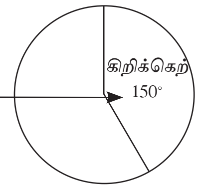


இதற்கேற்பக் கிறிக்கெற் விளையாட்டில் விருப்பமுள்ள 25 பேரை வகைக்குறிக்கும் ஆரைச்சிறையின் கோணம் $= 360^\circ \times \frac{25}{60}$

$= 6^\circ \times 25$

$= 150^\circ$

கிறிக்கெற் விளையாட்டில் விருப்பமுள்ள பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையைக் காட்டும் ஆரைச்சிறை

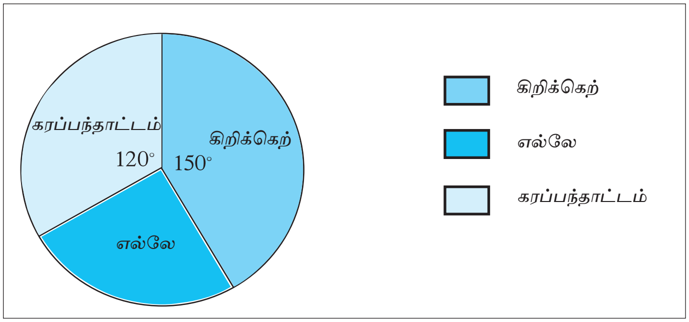


கரப்பந்தாட்டத்தில் விருப்பமுள்ள 20 மாணவர்களைக் காட்டும் மையக் கோணம்

$= 360^\circ \times \frac{20}{60}$

$= 120^\circ$

வட்டத்தின் எஞ்சியுள்ள வட்டத் துண்டத்தினால் எல்லே விளையாட்டில் விருப்பமுள்ள மாணவர்கள் வகைகுறிக்கப்படுகின்றனர். அதற்கு ஒத்த ஆரைச்சிறையின் கோணத்தை $360^\circ \times \frac{15}{60}$ எனக் காண முடியுமாயினும், அவ்வாறு காண்பது அவசியமற்றது. எஞ்சிய கோணத்தின் பெறுமானம் அதற்குச் சமமாக வேண்டும். இச்சகல விடயங்களையும் பின்வருமாறு ஒரு வட்டவரைபில் காட்டலாம்.



ஆரைச்சிறைகளை வெவ்வேறு நிறங்களில் நிறந்தீட்டுவதன் மூலம் தரவுகளை ஒப்பிடுதல் எளிதாகும். ஒரே வட்டத்தில் தரவுகள் வகைக்குறிக்கப்படுகின்றமையால் குறைவு, அதிகம் எனவும் ஒப்பிடுதல் எளிதாகும்.

உதாரணம் 1

600 பேர் பங்குபற்றும் சிரமதானம் ஒன்றில் பகலுணவை வழங்குவதற்காக அவர்களுக்கு விருப்பமான உணவு வகை பற்றிக் கேட்டுப் பெற்ற தகவல்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

உணவு வகை	ஆட்களின் எண்ணிக்கை
மீன்	250
முட்டை	150
இறைச்சி	75
மரக்கறி	125
மொத்தம்	600

மேற்குறித்த தகவல்களைக் கொண்டு ஒரு வட்ட வரைபை வரைவோம்

மீனை உண்ணும் 250 பேரைக் காட்டும் மையக் கோணம் $= 360^{o} \times \frac{250}{600}$

$= 150^{o}$

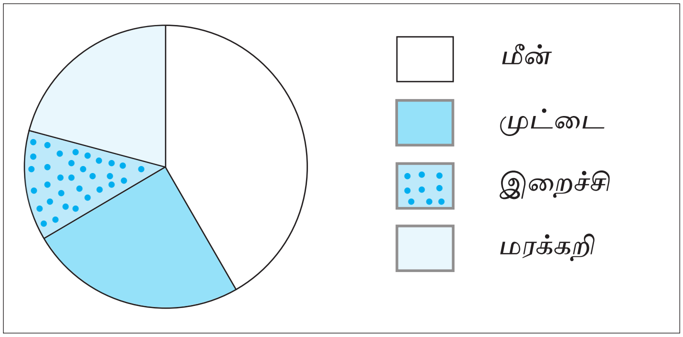
முட்டையை உண்ணும் 150 பேரைக் காட்டும் மையக் கோணம் $= 360^{o} \times \frac{150}{600}$

$= 90^{o}$

இறைச்சியை உண்ணும் 75 பேரைக் காட்டும் மையக் கோணம் $= 360^{o} \times \frac{75}{600}$

$= 45^{o}$

மேற்குறித்த தகவல்களுக்கேற்பத் தயாரித்த வட்டவரைபு கீழே காணப்படுகின்றது.



பயிற்சி 11.1

1. ஒரு வகுப்பில் 40 பிள்ளைகள் உள்ளனர். அவர்கள் நடனம், சங்கீதம், சித்திரம் என்னும் அழகியற் பாடங்களைத் தெரிந்தெடுத்துள்ளர். அவர்களில் 20 பிள்ளைகள் சித்திரத்தையும் 15 பிள்ளைகள் சங்கீதத்தையும் கற்கின்றனர் எஞ்சியிருக்கும் பிள்ளைகள் நடனத்தைக் கற்கின்றனர். மேற்குறித்த தகவல்களை ஒரு வட்டவரைபில் காட்டுக.

2. ஒரு பாடசாலையின் க.பொ.த. (உ.த.) வகுப்புகளின் மாணவர்கள் கற்கும் பாடத்துறைகள் பற்றிய தகவல்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

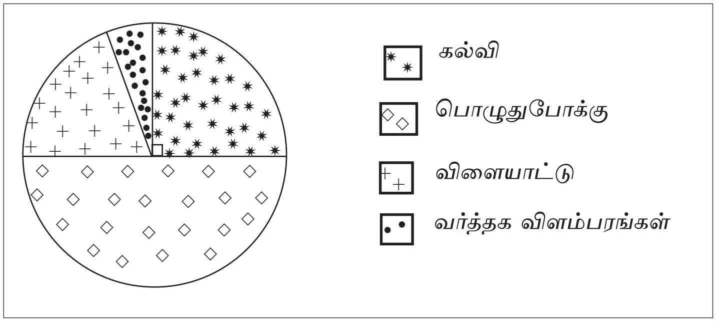
பாடத் துறைகள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
கலை	45
விஞ்ஞானம்	20
வர்த்தகம்	25
தொழினுட்பவியல்	30

மேற்குறித்த தகவல்களை ஒரு வட்டவரைபில் காட்டுக.

3. செய்தித்தாள்கள் விற்கப்படும் கடை ஒன்றில் வார நாள் ஒன்றில் விற்கப்பட்ட செய்தித்தாள்களின் எண்ணிக்கை 540 ஆகும். விற்கப்பட்ட சிங்களச் செய்தித் தாள்களின் எண்ணிக்கை 210 உம் தமிழ் செய்தித்தாள்களின் எண்ணிக்கை 150 உம் ஆகும். எஞ்சிய செய்தித்தாள்கள் ஆங்கிலச் செய்தித்தாள்களாகும். இத் தகவல்களை ஒரு வட்ட வரைபில் காட்டுக.

11.2 வட்டவரைபைக் கொண்டு தகவல்களைப் பெறுதல்

உதாரணம் 1



மேற்குறித்த வட்ட வரைபில் ஒரு நாளுக்கு 18 மணித்தியாலங்கள் ஒளிபரப்பப்படும் தொலைக்காட்சிச் சேவையில் ஒவ்வொரு வகை நிகழ்ச்சிக்காகவும் ஒதுக்கப்பட்டுள்ள ஒளிபரப்பு நேரம் பற்றிய விபரம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இவ்வட்டவரைபிலிருந்து பின்வரும் தகவல்களைப் பெற்றுக் கொள்வோம்.

(i) எவ்வகையான நிகழ்ச்சிக்குக் கூடுதலான நேரம் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது?

(ii) எவ்வகையான நிகழ்ச்சிக்குக் குறைந்தளவு நேரம் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது?

(iii) (a) ஒரு நாளில் கல்வி நிகழ்ச்சிகளுக்காக ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரத்தைக் காட்டும் ஆரைச்சிறையின் கோணத்தின் பெறுமானம் யாது?

(b) கல்வி நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள காலத்தை மொத்த ஒளிபரப்பு நேரத்தின் பின்னமாகக் காட்டுக.

(c) கல்வி நிகழ்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள காலம் யாது?

(d) கல்வி நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரத்திற்கும் பொழுதுபோக்கு நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரத்திற்கும் இடையிலான விகிதத்தை எளிய வடிவில் தருக.

(iv) விளையாட்டுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் 3 மணித்தியாலங்கள் எனின்

(a) விளையாட்டு நிகழ்ச்சிக்காக ஒதுக்கப்பட்டுள்ள ஆரைச்சிறைக் கோணம் யாது?

(b) வர்த்தக விளம்பரங்கள் ஒளிபரப்பாகும் காலம் எவ்வளவு?

(i) வட்டவரைபின் மிகப் பெரிய வட்டத் துண்டத்தினால் பொழுதுபோக்கு நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே பொழுதுபோக்கு நிகழ்ச்சிகளுக்குக் கூடுதலான நேரம் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) வர்த்தக விளம்பரங்களுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் மிகச் சிறிய ஆரைச் சிறையினால் காட்டப்பட்டுள்ளது. வர்த்தக விளம்பரங்களுக்குக் குறைந்தபட்ச (இழிவு) நேரம் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது.

(iii) (a) 90^0

(b) கல்வி நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும் ஆரைச்சிறைக் கோணம் $= 90^o$

மொத்த நேரத்தை வகைக்குறிக்கும் கோணம் $= 360^{o}$

கல்வி நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் மொத்த நேரத்தின் பின்னமாக $= \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$

(c) கல்வி நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் $= 18$ மணி. $\times \frac{90}{360}$

$= 4\frac{1}{2}$ மணித்தியாலங்கள்

(d) கல்வி நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள ஆரைச்சிறைக் கோணம் $= 90^{o}$

பொழுதுபோக்கு நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள ஆரைச்சிறைக் கோணம் $= 180^{o}$

கல்வி நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரத்திற்கும் பொழுதுபோக்கு நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரத்திற்குமிடையே உள்ள விகிதம் $= 90^{o} : 180^{o}$

$= 1 : 2$

(iv) (a) விளையாட்டுக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் மொத்த நேரத்தின் பின்னமாக $= \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

காட்டப்படும் ஆரைச்சிறைகளின் மையக் கோணம் $= 360^{\circ} \times \frac{1}{6}$

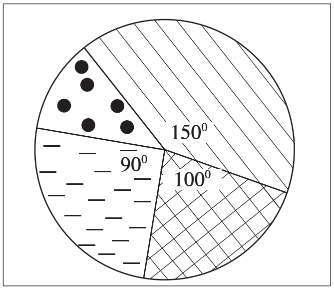
$= 60^{\circ}$

(*b*) வர்த்தக விளம்பரங்களுக்கான ஆரைச்சிறைக் கோணம் $= 360^{\circ} - 180^{\circ} - (90^{\circ} + 60^{\circ}) = 30^{\circ}$

$\therefore$ ஒதுக்கப்பட்ட காலம் $= \frac{30}{60} \times 3 = 1\frac{1}{2}$ மணித்தியாலம்

உதாரணம் 2

ஒரு குறித்த இடத்திலே 720 ஹெக்ரெயர் நிலத்தில் பயிரிடப்பட்டுள்ள பயிர்கள் பற்றிய தகவல்களைக் காட்டும் வட்ட வரைபு கீழே காணப்படுகின்றது.



வட்ட வரைபைக் கொண்டு பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை எழுதுக.

(i) கூடுதலான அளவு நிலத்தில் பயிரிடப்பட்டுள்ள பயிர் யாது?
(ii) குறைந்தளவு நிலத்தில் பயிரிடப்பட்டுள்ள பயிர் யாது?
(iii) தேயிலை பயிரிடப்பட்டுள்ள நிலத்தின் அளவு யாது?
(iv) கறுவா பயிரிடப்பட்டுள்ள நிலத்தின் அளவு யாது?

(i) இறப்பர்
(ii) கறுவா
(iii) தேயிலை பயிரிடப்பட்டுள்ள நிலத்தின் அளவைக் காட்டும் ஆரைச்சிறையின் கோணம் $= 100^\circ$

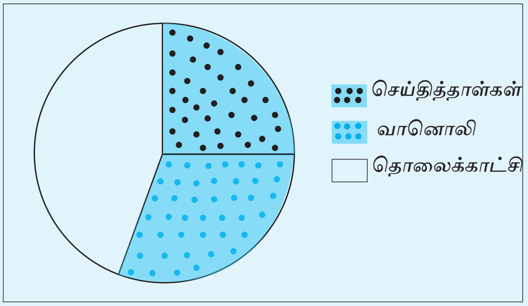
தேயிலை பயிரிடப்பட்டுள்ள நிலத்தின் அளவு $= \frac{100}{360} \times 72$ ஹெக்ரெயர்
$= 20$ ஹெக்ரெயர்

(iv) கறுவா பயிரிடப்பட்டுள்ள நிலத்தின் அளவைக் காட்டும் ஆரைச்சிறையின் கோணம் $= 360^\circ - (100^\circ + 150^\circ + 90^\circ)$
$= 360^\circ - 340^\circ$
$= 20^\circ$

கறுவா பயிரிடப்பட்டுள்ள நிலத்தின் அளவு $= \frac{20}{360} \times 720$ ஹெக்ரெயர்
$= 40$ ஹெக்ரெயர்

பயிற்சி 11.2

1. ஒரு பாடசாலையிலே தரம் 10 இல் கற்கும் 40 பிள்ளைகளிடமிருந்து அவர்களுக்கு விருப்பமான ஊடகம் பற்றிப் பெறப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட வட்ட வரைபு கீழே காணப்படுகின்றது.



வட்ட வரைபைக் கொண்டு பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை எழுதுக.

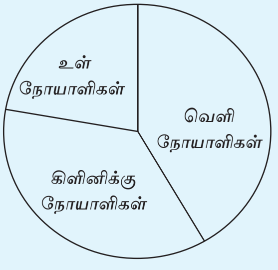
(i) கூடிய எண்ணிக்கையிலான பிள்ளைகள் விரும்பும் ஊடகம் யாது?

(ii) குறைந்த எண்ணிக்கையிலான பிள்ளைகள் விரும்பும் ஊடகம் யாது?

(iii) தொலைக்காட்சி ஊடகத்தை விரும்பும் பிள்ளைகளை வகைகுறிக்கும் ஆரைசிறையின் கோணம் 162^{o} எனின், தொலைக்காட்சி ஊடகத்தை விரும்பும் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iv) செய்தித்தாள் ஊடகத்தை விரும்பும் பிள்ளைகளை வகைகுறிக்கும் ஆரைச் சிறையின் கோணம் 90^{o} எனின் செய்தித்தாள்கள் ஊடகத்தை விரும்பும் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை

2. குறித்த ஒரு தினம் மருத்துவமனையொன்றில் பல்வேறு பிரிவுகளில் சிகிச்சை பெற்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் வட்டவரைபில் காணப்படுகின்றன. அத்தினத்தில் மருத்துவமனையில் சிகிச்சை பெற்ற நோயாளிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 600 ஆகும்.

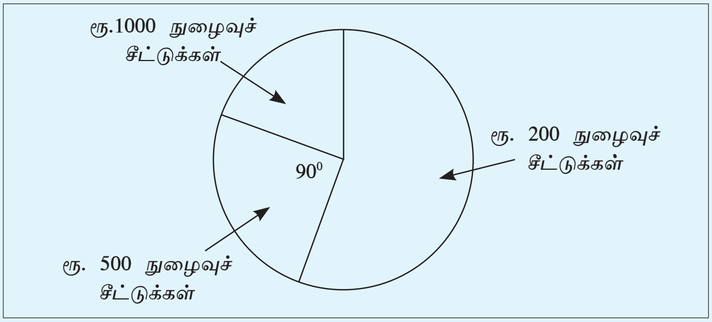


(i) இத்தினத்தில் அதிக எண்ணிக்கையான நோயாளிகள் சிகிச்சை பெற்ற பிரிவு யாது?

(ii) அத்தினத்தில் வெளி நோயாளிகளின் பிரிவில் சிகிச்சைப் பெற்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கையை வகைகுறிக்கும் ஆரைச்சிறையின் கோணம் 150^{o} எனின், அத்தினத்தில் அப்பிரிவில் சிகிச்சை பெற்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) அத்தினத்தில் இருந்த உள் நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை 130 எனின், வட்ட வரைபில் உள் நோயாளிகளைக் காட்டும் ஆரைச்சிறைக் கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. ஒரு நாடக நிகழ்ச்சிக்காக ரூ. 1000, ரூ. 500, ரூ. 200 பெறுமானமுள்ள நுழைவுச் சீட்டுக்கள் அச்சிடப்பட்டன. விற்கப்பட்ட நுழைவுச் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் வட்டவரைபில் காணப்படுகின்றன.



(i) என்ன பெறுமானமுள்ள நுழைவுச் சீட்டுகள் கூடுதலாக விற்கப்பட்டன?

(ii) விற்கப்பட்ட ரூ. 500 நுழைவுச் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை விற்கப்பட்ட நுழைவுச் சீட்டுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையின் என்ன பின்னமாகும்?

(iii) ரூ. 1000 நுழைவுச்சீட்டுகளில் 140 விற்கப்பட்டன. அந் நுழைவுச்சீட்டுகளைக் காட்டும் ஆரைச்சிறையின் கோணம் 70^0 எனின், விற்கப்பட்ட ரூ. 200 நுழைவுச் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iv) நுழைவுச் சீட்டுகளை விற்பதன் மூலம் பெற்ற மொத்த வருமானம் யாது?

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு மகா வித்தியாலயத்தில் தரம் 1 தொடக்கம் கா.பொ.த. (உ.த.) வகுப்புகள் வரை நடைபெறுகின்றன. தரங்கள் 1-5 இல் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 600 ஆகும். தரங்கள் 6-11 இல் உள்ள மாணவர்ளின் எண்ணிக்கை 500 ஆகும். க.பொ.த. (உ.த.) இல் கல்வி கற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 340 ஆகும். இத்தகவல்களை ஒரு வட்ட வரைபில் காட்டுக.

2. ஒரு தொழிற்சாலையில் ஊழியருக்கு போக்குவரத்து வசதிகளைச் செய்வதற்காக சேகரிக்கப்பட்ட தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

தொழிற்சாலைக்கு வரும் விதம்	ஊழியர் எண்ணிக்கை
நடந்து வருதல்	110
சைக்களில் வருதல்	100
பேருந்தில் வருதல்	690

இத் தகவல்களை வட்ட வரைபொன்றில் காட்டுக.

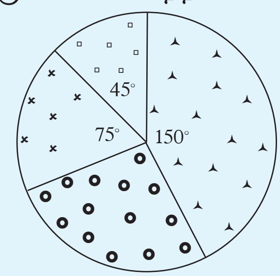
3. ஒரு வீட்டில் ஜனவரி மாதத்திற்கான நீர், மின், தொலைபேசிக் கட்டணங்களின் மொத்தம் ரூ. 2700 ஆகும். மின்சாரத்திற்காக அறவிடப்பட்ட கட்டணம் ரூ.1440 ஆகும். நீரை வழங்குவதற்காக அறவிட்ட பணம் ரூ. 750 ஆகும். மேற்குறித்த தகவல்களை ஒரு வட்டவரைபில் காட்டுக.

4. ஒரு நலன்புரிச் சங்கம் வருடாந்த சுற்றுலாப் பிரயாணம் செல்வதற்கு பொலன்னறுவை, அனுராதபுரம், கண்டி என்னும் பிரதேசங்களில் ஒன்றைத் தெரிந்தெடுக்கத் தீர்மானிக்கப்பட்டது. உறுப்பினர் எண்ணிக்கையில் $\frac{1}{4}$ ஆனோர் பொலன்னறுவைப் பிரதேசத்தை விரும்பினர். 36 உறுப்பினர்கள் கண்டியையும் எஞ்சியிருந்த 54 உறுப்பினர்கள் அனுராதபுரத்தையும் விரும்பினர். மேற்குறித்த தரவுகளை ஒரு வட்டவரைபில் வகைகுறிக்க.

(i) நலன்புரிச் சங்கத்தின் உறுப்பினர்கள் எண்ணிக்கை யாது?

(ii) இத் தகவல்களை வட்ட வரைபொன்றில் காட்டுக.

5. ஒரு தேர்தலில் கட்சிகள் பெற்ற வாக்குகளின் எண்ணிக்கை பின்வரும் வட்டவரைபில் காணப்படுகின்றது. கூடுதல் வாக்கு எண்ணிக்கையைப் பெற்ற கட்சிக்குக் கிடைத்த வாக்குகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 9 300 ஆகும்.



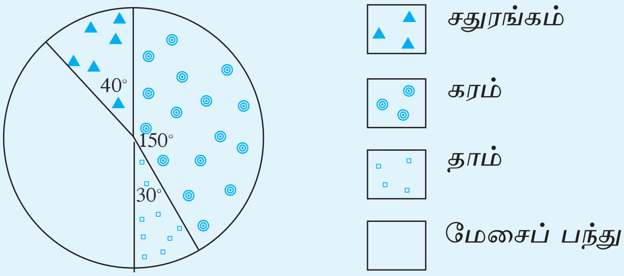
(i) நான்கு கட்சிகளுக்கும் கிடைத்த மொத்த வாக்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(ii) மூன்றாம் இடத்தைப் பெற்ற கட்சிக்குக் கிடைத்த வாக்குகளின் மொத்த எண்ணிக்கை யாது?

(iii) நான்காம் இடத்தைப் பெற்ற கட்சிகளுக்குக் கிடைத்த வாக்குகளின் எண்ணிக்கையை மொத்த வாக்குகளின் எண்ணிக்கையின் பின்னமாகக் காட்டுக.

(iv) வட்டவரைபைக் கொண்டு இரண்டாம் இடத்தைப் பெற்ற கட்சிக்குக் கிடைத்த வாக்குகளின் எண்ணிக்கையை மொத்த வாக்குகளின் எண்ணிக்கையின் சதவீதமாகக் காட்டுக?

7. ஒரு விளையாட்டு கழகத்தின் உறுப்பினர்களிடம் தமக்கு விருப்பமான உள்ளக விளையாட்டுப் பற்றி விசாரித்துச் சேகரித்த தரவுகள் கீழே வட்ட வரைபில் காணப்படுகின்றன.



சதுரங்கத்தை விரும்புபவர்களின் எண்ணிக்கை 8 ஆகும்.

(i) கூடுதலான உறுப்பினர்கள் விரும்பும் விளையாட்டு யாது?

(ii) கரம் விளையாட்டை விரும்பும் உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) மேசைப் பந்தாட்டத்தை விரும்பும் உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

12 அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியது

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காண்பதற்குத் தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காணல்

எண்கள் சிலவற்றின் பொது மடங்குகளுட் சிறியது (**பொ.ம.சி.**) என்பது அவ்வெல்லா எண்களினாலும் வகுக்கப்படும் மிகச் சிறிய எண்ணாகும். அதனைக் காணும் விதம் பற்றி நீங்கள் முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். அது தொடர்பான அறிவை நினைவுகூர்வோம்.

6, 8, 12 என்னும் எண்களின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதை முதன்மைக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுவதன் மூலம் காண்போம்.

$$6 = 2\times3 = 2^1\times3^1$$
$$8 = 2\times2\times2 = 2^3$$
$$12 = 2\times2\times3 = 2^2\times3$$

இங்கு ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட முதன்மைக் காரணிகள் 2,3 ஆகும். மூன்று எண்களையும் கருதும்போது அவற்றின்,

2 இன் சுட்டியின் மிகப் பெரிய வலு $= 2^3$
3 இன் சுட்டியின் மிகப் பெரிய வலு $= 3^1$

$\therefore$ ஆகவே பொது மடங்குகளுட் சிறியது $= 2^3\times3$
$= 24$

இதற்கேற்பச் சில எண்களின் பொ.ம.சி ஐக் காணும் முறையை இவ்வாறு காட்டலாம்.

1. ஒவ்வோர் எண்ணையும் முதன்மைக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுக.
2. அக்காரணிகளிடையே ஒவ்வொரு முதன்மை எண்ணுக்கும் மிகப் பெரிய சுட்டியை உடைய வலுவைத் தெரிந்தெடுக்க.
3. அவ்வலுக்கள் எல்லாவற்றையும் பெருக்குவதன் மூலம் தேவையான பொ.ம.சி ஐப் பெறலாம்.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் எண் திரிதங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பொது மடங்குகளுட் சிறியதை முதன்மைக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுவதன்மூலம் காண்க.
   (i) 12, 18, 24 (ii) 6, 10, 15 (iii) 20, 30, 60
   (iv) 8, 12, 24 (v) 24, 36, 48

2. ஐஸ்கிறீம் உற்பத்தி நிறுவனம் ஒன்றிடம் மூன்று ஐஸ்கிறீம் வான்கள் உள்ளன. இவை முறையே முதலாவது 3 நாட்களுக்கு ஒருமுறை அடுத்தது 6 நாட்களுக்கு ஒரு தடவையும் மூன்றாவது 8 நாட்களுக்கு ஒரு தடவையும் ''வள்ளுவர்'' இல்லத் தொகுதிக்கு வருகின்றன. இம்மூன்று வான்களும் ஒரே நாளில் ''வள்ளுவர்'' இல்லத்தொகுதிக்கு வருமெனின், அவை எத்தனை நாட்களுக்குப் பின்னர் மீண்டும் ஒரே நாளில் அவ்வில்லத் தொகுதிக்கு வரும்?

3. திரு. சங்கர் ஒவ்வொரு ஞாயிற்றுக்கிழமையும் சூரியன் மறைவதை இரசிப்பதற்குக் காலிமுக மைதானத்துக்குச் செல்லும் அதே வேளை திரு. முகமது 6 நாட்களுக்கு ஒரு தடவையும் திரு. பிரியந்தன் 8 நாட்களுக்கு ஒரு தடவையும் சூரியன் மறைவதை இரசிப்பதற்கு இவ்விடத்துக்கு வருகின்றனர். 2013.12.08 ஆந் திகதி ஞாயிற்றுக்கிழமை அவர்கள் காலிமுக மைதானத்தில் முதல் தடவை சந்திக்கும் அதே வேளை அவர்கள் எத்தனை நாட்களுக்குப் பின்னர் அதே இடத்தில் மீண்டும் சந்திப்பர்? அத்தினம் யாது?

4. ஓர் எண்ணை 5, 6 மற்றும் 7 ஆகிய ஒவ்வொரு எண்ணினாலும் வகுக்கும்போதும் 1 மீதியாகும். அவ்வாறு அமையும் மிகச் சிறிய எண்ணைக் காண்க.

12.1 அட்சரகணித உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காணல்

$4a^2$, $6ab$, $8b$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காண்போம். ஒவ்வோர் உறுப்பையும் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுவோம்.

$$4a^2 = 2\times2\times a\times a = 2^2\times a^2$$
$$6ab = 2\times3\times a\times b = 2^1\times3^1\times a^1\times b^1$$
$$8b = 2\times2\times2\times b = 2^3\times b^1$$

இவ்வட்சரகணிதக் கோவைகளின் ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட காரணிகள் 2, 3, a, b ஆகும்.

2 இன் மிகப் பெரிய வலு 2^3
3 இன் மிகப் பெரிய வலு 3^1
a இன் மிகப் பெரிய வலு a^2
b இன் மிகப் பெரிய வலு b^2

$$\therefore \textbf{பொ.ம.சி.} = 2^3 \times 3 \times a^2 \times b$$
$$= 24a^2b$$

தரப்பட்ட அட்சரகணித உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவைகளின் ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட எல்லாக் காரணிகளினதும் மிகப் பெரிய சுட்டியைக் கொண்ட வலுக்களின் பெருக்கத்தின்மூலம் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைப் பெறலாம்.

பயிற்சி 12.1

1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள கோவைகளின் பொ.ம.சி ஐக் காண்க

(i) xy, xy^2 (ii) a^2b, ab^2 (iii) $6, 3a, 8b$ (iv) $24, 8x, 10x^2$
(v) $4m, 8mn, 12m^2$ (vi) $6p, 4pq, 12pq^2$ (vii) $4, 6x^2y, 8y$ (viii) m^2n, nm, nm^2
(ix) $ab, 4a^2b, 8a^2b^2$ (x) $5xy, 10x^2y, 2xy^2$

ஈருறுப்புக் கோவைகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொ.ம.சி ஐக் காணல்

$2x + 4$ இனதும் $3x - 9$ இனதும் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காண்போம்.

இத்தகைய அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொ.ம.சி. ஐக் காண்பதற்கு முன்பாக இக்கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்போம்.

$$2x + 4 = 2\,(x + 2)$$
$$3x - 9 = 3\,(x - 3)$$

ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட காரணிகள் $2,\ 3,\ (x + 2),\ (x - 3)$ ஆகும்.
மிகப் பெரிய வலுக்களின் பெருக்கம் $= 2 \times 3 \times (x+2) \times (x-3)$
$\therefore$ பொ.ம.சி. $= 6\,(x+2)\,(x-3)$

உதாரணம் 1

$15x^2$, $20\ (x+1)$, $10\ (x+1)^2$ ஆகியவற்றின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காண்க.

$15x^2 \quad = 3 \times 5 \times x^2$

$20\ (x+1) = 2 \times 2 \times 5 \times (x+1) = 2^2 \times 5\ (x+1)$

$10\ (x+1)^2 = 2 \times 5 \times (x+1)^2$

ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட காரணிகள் 2, 3, 5, x^2 , $(x+1)$ ஆகும்.

$\therefore$ பொ.ம.சி $= 2^2 \times 3 \times 5 \times x^2 (x+1)^2$

$= 60x^2 (x+1)^2$

உதாரணம் 2

$(b-a)$, $2(a-b)$, $4a^2\ (a-b)^2$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காண்க.

$(b-a) = (-1) \times (a-b)$

$2(a-b) = 2 \times (a-b)$

$4a^2 (a-b) = 2 \times 2 \times a^2 \times (a-b)^2$

இங்கு இரு உறுப்புகளில் $a-b$ ஒரு காரணியாக இருப்பதனால் உறுப்பு $b-a$ யையும் $(-a+b)$ என அமைதல் வேண்டும்.

ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட காரணிகள் 2, (-1), a, $(a-b)$ ஆகும்.

மிகப் பெரிய வலுக்களின் பெருக்கம் $= 2^2 \times (-1) \times a^2 \times (a-b)^2$

$\therefore$ பொ.ம.சி $= -4a^2 (a-b)^2$

பயிற்சி 12.3

1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொ.ம.சி ஐக் காண்க.

a. $3x+6$, $2x-4$
b. $2a+8$, $3a+12$
c. $p-4$, $8-2p$
d. $8(x+5)$, $20(x+5)^2$
e. $3x$, $15(x+1)$, $9(x-1)$
f. a^2, $2(a-b)$, $(b-a)$
g. $3(x-2)$, $5(3-x)$, $(x-2)(x-3)$
h. $3x$, $15(x-3)$, $6(x-3)^2$
i. $(t-1)$, $(1-t)^2$
j. $2a-4$, $12(a-2)^2$, $8(a+2)(2-a)^2$

அட்சரகணிதக் கோவைகளுக்கான பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காணல் மேலும்

உதாரணம் 1

$2x - 6$, $4x\ (x - 3)^2$, $6\ (x^2 - 9)$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காண்க.

$2x - 6 \quad = 2\ (x - 3)$

$4x\ (x - 3^2) = 2 \times 2 \times x \times (x - 3)^2$

$6\ (x^2 - 9) \quad = 2 \times 3 \times (x - 3)\ (x + 3)$

ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட காரணிகள் 2, 3, x, $(x - 3)$, $(x + 3)$ ஆகும்.

$\therefore$ பொ.ம.சி. $= 2^2 \times 3 \times x \times (x + 3) \times (x - 3)^2$

$= 12x\ (x + 3)\ (x - 3)^2$

உதாரணம் 2

$3\ (x + 2)^2$, $x^2 + 5x + 6$, $2x2 + 7x + 3$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காண்க.

$3,\ (x + 2)^2 = 3 \times (x + 2)^2$

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)\ (x + 3)$

$2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)\ (2x + 1)$

ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட காரணிகள் 3, $(x + 2)$, $(x + 3)$, $(2x + 1)$ ஆகும்.

$\therefore$ பொ.ம.சி. $= 3\ (x + 3)\ (2x + 1)\ (x + 2)^2$

$= 3\ (x + 3)\ (2x + 1)\ (x + 2)^2$

பயிற்சி 12.2

1. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொ.ம.சி. ஐக் காண்க.

a. $3(x - 2), (x^2 - 4)$

b. $6(x - 1), 2x\ (x^2 - 1)$

c. $3x - 9, 4x\ (x - 3), (x^2 - 9)$

d. $(a - b), (a^2 - b^2)$

e. $p(p - q), pq\ (p^2 - q^2)$

f. $x^2 + 2x + 1, 2\ (x + 1)$

g. $x^2 - 8x + 15, 2x^2 - x - 15$

h. $x^2 - 4, 3x^2 - 5x - 2, 3x^2 - 9x - 12$

i. $m^2 - 5m + 6, m^2 - 2m - 3$

j. $x^2 - a^2, x^2 - ax, x^2 - 2ax + a^2$

13 அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- பகுதியில் சமனற்ற அட்சரகணிதப் பகுதிகளைக் கொண்ட பின்னங்களைச் சுருக்குவதற்குத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதப் பின்னங்களுக்கான சில உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$$\frac{x}{4}, \quad \frac{2x+1}{x+3}, \quad \frac{3}{1+6y}, \quad \frac{x^2+x+1}{x^3-3x}$$

இவற்றில் பகுதியில் அல்லது தொகுதியில் அல்லது இரண்டிலும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் உண்டு.

அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டுதல், கழித்தல் என்பன பற்றி நீங்கள் முன்னர் கற்றவற்றைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டல் பயிற்சி

கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

(i) $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}$ (ii) $\frac{x+1}{5}+\frac{2x+3}{3}$ (iii) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$

(iv) $\frac{x+1}{3}+\frac{x+3}{6}$ (v) $\frac{2}{a}+\frac{3}{a}-\frac{1}{a}$ (vi) $\frac{5}{x+2}-\frac{3x+1}{x+2}$

13.1 பகுதியில் சமனற்ற ஓர் அட்சரகணித உறுப்பைக் கொண்ட பின்னங்களைச் சுருக்குதல்

சுருக்குக.

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{2x}$$

$\frac{2}{x}, \frac{3}{2x}$ ஆகிய இரண்டு பின்னங்களிலும் பகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் x, $2x$ ஆகும். அவை சமனற்றவை என்பதால் இவ்விரண்டு பின்னங்களையும் ஒரே தடவையில் கூட்ட முடியாது. எனவே இரண்டு பின்னங்களிலும் பகுதிகள் சமனாகுமாறு ஒவ்வொரு பின்னத்திற்கும் சமவலுப் பின்னங்களை எழுதிச் சுருக்குவோம்.

அதாவது, $\frac{2}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{4}{2x}+\frac{3}{2x}$

$$=\frac{7}{2x}$$

ஒவ்வொரு சமவலுப் பின்னத்திலும் பகுதி $2x$ ஆகும். $2x$ என்பது ஒவ்வொரு பின்னத் தினதும் பகுதியின் (x, $2x$ ஆகியவற்றின்) பொ.ம.சி. என்பதை அவதானிக்க. இதே போன்று கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதப் பின்னங்கள் சுருக்கப்பட்டுள்ள முறையைப் பார்க்க.

உதாரணம் 1

$$\frac{5}{3a}-\frac{3}{4a}$$

$$=\frac{5\times 4}{3a\times 4}-\frac{3\times 3}{4a\times 3}$$

$$=\frac{20}{12a}-\frac{9}{12a}$$

$$=\frac{11}{12a}$$

உதாரணம் 2

$$\frac{2}{3x}+\frac{5}{4y^2}$$

$$=\frac{2\times 4y^2}{3x\times 4y^2}+\frac{5\times 3x}{4y^2\times 3x}$$

$$=\frac{8y^2}{12xy^2}+\frac{15x}{12xy^2}$$

$$=\frac{8y^2+15x}{12xy^2}$$

உதாரணம் 3

$$\frac{3b}{4a}+\frac{2a}{3b^2}+\frac{a}{2b}$$

$$=\frac{3b\times 3b^2}{4a\times 3b^2}+\frac{2a\times 4a}{3b^2\times 4a}+\frac{a\times 6ab}{2b\times 6ab}$$

$$=\frac{9b^3}{12ab^2}+\frac{8a^2}{12ab^2}+\frac{6a^2b}{12ab^2}$$

$$=\frac{9b^3+8a^2+6a^2b}{12ab^2}$$

பயிற்சி 13.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

a. $\frac{3}{x}+\frac{1}{3x}$ **b.** $\frac{7}{4a}-\frac{1}{2a}$ **c.** $\frac{3}{5m}+\frac{5}{4m^2}$ **d.** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

e. $\frac{7}{3x}-\frac{5}{4x}$ **f.** $\frac{3}{2a}+\frac{2}{a}-\frac{1}{3a}$ **g.** $\frac{3}{4x}-\frac{2}{3x}+\frac{4}{2x}$ **h.** $\frac{5}{m}+\frac{n}{3m}$

i. $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ **j.** $\frac{1}{4a^2}+\frac{3}{5a}$ **k.** $\frac{3n}{m^2}-\frac{4}{5m}$ **l.** $\frac{3}{2a^2}-\frac{5}{4b}+\frac{4b}{3}$

13.2 பகுதியில் சமனற்ற ஈருறுப்புக் கோவைகளையுடைய அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குதல்

இங்கும் மேற்குறித்த 13.1 இல் போன்றே பகுதியிலுள்ள அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொ.ம.சி. ஐக் கண்டு ஒவ்வொரு பின்னத்திற்குமான சமவலுப் பின்னங்களை எழுதிய பின்னர் சுருக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக.

$$\frac{1}{(p+1)}+\frac{1}{(p+5)}$$

$(p+1)$, $(p+5)$ ஆகியவற்றின் பொ.ம.சி.$(p+1)(p+5)$ ஆகையால்

$$\frac{1}{(p+1)}+\frac{1}{(p+5)} = \frac{(p+5)}{(p+1)(p+5)}+\frac{(p+1)}{(p+1)(p+5)}$$

$$= \frac{(p+5)+(p+1)}{(p+1)(p+5)}$$

$$= \frac{2p+6}{(p+1)(p+5)}$$

$$= \frac{2(p+3)}{(p+1)(p+5)}$$

உதாரணம் 2

சுருக்குக.

$$\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x+4}$$

$= \frac{2(x+4)}{(x+3)(x+4)} + \frac{3(x+3)}{(x+3)(x+4)}$ $(x+3)$ $(x+4)$ ஆகியவற்றின் பொ.ம.சி $(x+3)(x+4)$ ஆகும்.

$$= \frac{2(x+4)+3(x+3)}{(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{2x+8+3x+9}{(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{5x+17}{(x+3)(x+4)}$$

பகுதியில் இருபடிக் கோவைகள் உள்ளபோது இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகளை எழுதிய பின்னர் பகுதிகளின் பொ.ம.சி. ஐக் கண்டு மேற்குறித்தவாறே சுருக்க வேண்டும் .

உதாரணம் 3

சுருக்குக: $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2-3x-10}$

$$\frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{(x^2-3x-10)}$$

$$=\frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{1\times(x-5)}{(x+2)(x+5)}+\frac{1}{(x+2)(x+5)}$$

$$=\frac{(x-5)+1}{(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{(x-4)}{(x+2)(x-5)}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக: $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}$

$$\frac{1}{(x-1)}+\frac{3}{(x+1)}-\frac{2}{(x^2-1)}$$

$$=\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x+1+3x-3-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{4x-4}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$=\frac{4}{(x+1)}$$

பயிற்சி 13.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

(I)

a. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a+2}$

b. $\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x+1}$

c. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}$

d. $5+\dfrac{2}{x+3}$

e. $\dfrac{5}{4x+1}-\dfrac{3}{3(2x+1)}$

f. $\dfrac{8}{x+5}-\dfrac{3}{5-x}$

g. $\dfrac{2}{x+5}+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x}$

h. $\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{3}{5-x}$

i. $\dfrac{3}{2(y-2)}+\dfrac{2}{3(y-2)}$

j. $\dfrac{1}{m-3}-\dfrac{2}{2m-1}$

k. $\dfrac{3}{x-6}-\dfrac{2}{2x-5}$

l. $\dfrac{4}{3(x+1)}-\dfrac{2}{5(x-1)}$

(II)

a. $\dfrac{x+3}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1}$

b. $\dfrac{t-1}{t+1} + \dfrac{1}{t^2-1}$

c. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2-1}$

d. $\dfrac{1}{a-3} + \dfrac{1}{a^2-a-6}$

e. $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2+x-6}$

f. $\dfrac{3}{x^2+x-2} - \dfrac{1}{x^2-x-6}$

g. $\dfrac{4}{p^2+p-6} - \dfrac{2}{p^2+5p+6}$

h. $\dfrac{1}{x^2+4x+4} - \dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$

i. $\dfrac{3}{a^2+5a+6} + \dfrac{1}{a^2+4a+3}$

j. $\dfrac{1}{2a+1} + \dfrac{1}{a^2+3a+2}$

14 சதவீதம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- வரி வகைகளை இனங்காண்பதற்கும் அவற்றுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- எளிய வட்டியுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

நீங்கள் இதுவரைக்கும் கற்றுள்ள சதவீதங்களுடன் தொடர்புடைய விடயங்களை நினைவுகூர்ந்து பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

பின்னம்	தசமம்	சதவீதம்
$\frac{1}{2}$	0.5	50%
$\frac{3}{5}$	0.6	
	0.8	80%
$\frac{1}{4}$		25%
	0.06	
		8%

2. சதவீதமாகக் காட்டுக.

(i) ரூ. 200 இல் ரூ. 50 (ii) ரூ. 1 இல் 25 சதம்
(iii) 2m இல் 8 cm (iv) 1 kg இல் 50 g
(v) 1 l இல் 300 ml (vi) 40 பிள்ளைகளில் 15 பிள்ளைகள்

3. பின்வருவனவற்றின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) ரூ. 500 இன் 60% (ii) 250 km இன் 20% (iii) 24 மணித்தியாலங்களின் 25%
(iv) 2 l இன் 3% (v) 1 kg இன் 15% (vi) 1.5 m இன் 12%

வரி

எந்தவொரு நாட்டினதும் அரசாங்கம் அந்நாட்டின் மீண்டும்வரும் செலவுகளை அடைப்பதற்காக நாட்டு மக்களிடமிருந்து பணத்தை அறவிடுகின்றது. அவ்வாறு அறவிடப்படும் பணம் வரி எனப்படும். காலத்திற்குக் காலம் நாட்டில் செயற்படுத்தப்படும் வரி வகைகளும் அறவிடப்படும் பணத்தின் அளவும் வேறுபடும். வரி பெரும்பாலும் சதவீதமாக அறவிடப்படுகின்றது. ஒருவரால் அரசாங்கத்திற்கு நேரடியாகச் செலுத்த வேண்டிய வரி நேரடி வரி எனப்படும். அத்தகைய சில வரிகள் கீழே உள்ளன.

- இறை வரி (Rates)
- தீர்வை (Customs duty)
- வருமான வரி (Income tax)

நேரடியாகச் செலுத்தப்படாத போதிலும் நபர்களிடமிருந்து வேறு விதத்தில் அறவிடப்படும் வரி நேரில் வரி எனப்படும். தற்போது அறவிடப்படும் அத்தகைய வரி வகையாகப் பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரி (Value Added Tax) VAT வரியை அறிமுகஞ் செய்யலாம்.

இறை வரி

மாநகர சபை, நகர சபை, பிரதேச சபை என்னும் உள்ளூராட்சி மன்றங்களின் மூலம் உரிய அதிகார வரம்பினுள்ளே வதிபவர்களுக்கு வழங்கப்படும் வீதி வசதிகள், கழிகான் முகாமைத்துவம், வீதி விளக்கேற்றல் போன்ற பல்வேறு வசதிகளுக்காக அவ்வதிகார வரம்பினுள்ளே இருக்கும் வீடுகள் , காணிகள், வியாபார நிலையங்கள் ஆகியவற்றிலிருந்து அறவிடப்படும் பணம் **இறை வரி** எனப்படும். அரசாங்க மதிப்பீட்டுத் திணைக்களத்தின் மூலம் வீட்டுக் காணிகள் போன்ற ஆதனங்களின் ஆண்டுப் பெறுமானம் மதிப்பிடப்படும். அதே வேளை அம்மதிப்பிட்ட பெறுமானத்தில் ஒரு குறித்த சதவீதம் இறை வரியாக அறவிடப்படுகின்றது. இவ்வரி ஒவ்வொரு ஆண்டிற்கும் கணிக்கப்படுகின்ற அதே வேளை அவ்வரியை ஒரே தடவையில் அல்லது மூன்று மாதங்களுக்கு, அதாவது காலாண்டிற்கு ஒரு தடவை வீதம் நான்கு சம தொகைகளாகச் செலுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

ஒரு நகரசபை அதன் அதிகார வரம்பினுள்ளே இருக்கும் ஆண்டுப் பெறுமானம் ரூ. 36 000 என மதிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒரு வீட்டிற்கு 4 % ஆண்டு இறை வரியை அறவிடுமெனின், ஒரு காலாண்டிற்காகச் செலுத்த வேண்டிய இறை வரியைக் கணிக்க.

$$\text{ஆண்டு இறை வரி} = \text{ரூ. } 36\ 000 \times \frac{4}{100}$$
$$= \text{ரூ. } 1\ 440$$

$$\text{ஒரு காலாண்டிற்காகச் செலுத்தும் இறைவரி} = \text{ரூ. } 1\ 440 \div 4$$
$$= \text{ரூ. } 360$$

உதாரணம் 2

ஒரு நகர சபை ஆண்டு மதிப்பீட்டுப் பெறுமானம் ரூ. 24 000 ஆகவுள்ள ஒரு கடைக்கு ஒரு காலாண்டிற்காக அறவிடப்படும் இறை வரி ரூ. 300 எனின், அறவிடும் இறை வரியின் சதவீதத்தைக் கணிக்க.

கடையின் மதிப்பீட்டுப் பெறுமானம் = ரூ. 24 000
ஒரு காலாண்டிற்காக அறவிடப்படும் இறை வரி = ரூ. 300
ஓர் ஆண்டிற்காக அறவிடப்படும் இறை வரி = ரூ. 300 × 4
= ரூ. 1 200

$$\text{அறவிடப்படும் இறை வரியின் சதவீதம்} = \text{ரூ. } \frac{1\ 200}{24\ 000} \times 100$$

$$= 5\ \%$$

தீர்வை

சில பொருள்களை இறக்குமதி செய்யும்போதும் ஏற்றுமதி செய்யும்போதும் அவற்றின் பெறுமானத்தில் ஒரு பகுதியை அரசாங்கத்திற்கு வரியாகச் செலுத்துதல் வேண்டும். அவ்வாறு அறவிடப்படும் வரி **தீர்வை** எனப்படும். இலங்கைச் சுங்கத் திணைக்களத்தினால் இத்தீர்வை அறவிடப்படுகின்றது.

வெளிநாட்டுச் சேவையில் ஈடுபட்டுத் திரும்பி வரும் நபர்கள் சில பொருள்களைத் தீர்வையின்றி வாங்கலாம். அதற்காக விமான நிலையங்களில் தீர்வையில்லாத கடைத் தொகுதிகள் உள்ளன. மேலும், சில சேவைகளில் ஈடுபட்டுள்ளவர்களுக்கும் தீர்வையில்லாத வாகனங்களை இறக்குமதி செய்வதற்கான வாய்ப்பு அரசாங்கத்தினால் வழங்கப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

ஒரு குறித்த வகைக் கடிகாரத்தின் இறக்குமதிப் பெறுமானத்தில் 10% ஐத் தீர்வையாகச் செலுத்தல் வேண்டும். ரூ. 5 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு கடிகாரத்திற்காகச் செலுத்த வேண்டிய தீர்வை யாது?

செலுத்த வேண்டிய தீர்வை $= \text{ரூ. } 5\,000 \times \frac{10}{100}$

$= \text{ரூ. } 500$

உதாரணம் 2

ஒரு மோட்டார் வாகனத்தை இறக்குமதி செய்யும்போது அதன் பெறுமானத்தில் 60% ஐத் தீர்வையாகச் செலுத்த நேரிடுகின்றது. ரூ. 2 000 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு மோட்டார் வாகனத்திற்காகத் தீர்வையைச் செலுத்திய பின்னர் அதன் பெறுமானம் யாது?

முறை I

செலுத்த வேண்டிய தீர்வை $= \text{ரூ. } 2\,000\,000 \times \frac{60}{100}$

$= \text{ரூ. } 1\,200\,000$

தீர்வையாகச் செலுத்திய பின்னர்
மோட்டார் வாகனத்தின் பெறுமானம் $= \text{ரூ. } 2\,000\,000 + \text{ரூ. } 1\,200\,000$

$= \text{ரூ. } 3\,200\,000$

முறை II

தீர்வையைச் செலுத்திய பின்னர்
மோட்டார் வாகனத்தின் பெறுமானம் $= \text{ரூ. } 2\,000\,000 \times \frac{160}{100}$

$= \text{ரூ. } 3\,200\,000$

உதாரணம் 3

இலங்கையிலிருந்து மத்திய கிழக்கு நாடுகளுக்கு ரூ. 300 000 பெறுமானமுள்ள பழத் தொகை ஒன்றை ஏற்றுமதி செய்யும்போது இலங்கைச் சுங்கத்தினால் அறவிடப்பட்ட தீர்வை ரூ. 18 000 எனின், ஏற்றுமதியாளர் செலுத்த நேரிட்ட தீர்வையின் சதவீதத்தைக் காண்க.

பழத்தொகையின் பெறுமானம் = ரூ. 300 000

செலுத்த நேரிட்ட தீர்வை = ரூ. 18 000

அறவிடப்பட்ட தீர்வைச் சதவீதம் $= \frac{18\,000}{300\,000} \times 100\%$

$= 6\,\%$

உதாரணம் 4

இறக்குமதி செய்யப்பட்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டி ஒன்றுக்காக 15% தீர்வையை அறவிட்ட பின்னர் அத்தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் பெறுமானம் ரூ. 28 750 எனின், தீர்வையை அறவிடுவதற்கு முன்னர் அத்தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் பெறுமானம் யாது ?

தீர்வையை அறவிடுவதற்கு முன்னர்
தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் பெறுமானம் $= \text{ரூ. } 28\ 750 \times \frac{100}{115}$

$= \text{ரூ. } 25\ 000$

வருமான வரி

ஒரு குறித்த நபர் தமது தொழிலிருந்து அல்லது ஆதனத்திலிருந்து அல்லது வியாபாரத்திலிருந்து பெறும் ஆண்டு வருமானம் ஒரு குறித்த எல்லையைத் தாண்டும் போது அரசாங்கத்திற்குச் செலுத்த வேண்டிய வரி **வருமான வரி** எனப்படும்.

ஒரு குறித்த மதிப்பீட்டு ஆண்டுக்காகச் செலுத்த வேண்டிய வருமான வரியை ஆண்டுதோறும் அல்லது மூன்றுமாதத் தவணைத் தொகைகளாகச் செலுத்துவதற்கு வசதிகள் செய்யப்பட்டுள்ளன. உள்நாட்டு இறை வரித் திணைக்களத்தினால் 2011 ஆம் ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைப்படுத்தப்படும் வருமான வரி கணிக்கப்படும் எல்லைகளும் சதவீதங்களும் இடம்பெறும் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. (இப்பெறுமானங்கள் எதிர்காலத்தில் மாறலாம்).

ஆண்டு வருமானம்	வரிச் சதவீதம்
முதல் ரூ. 500 000	வருமான வரியிலிருந்து விலக்களிக் கப்பட்டுள்ளது
அடுத்த ரூ. 500 000	4%
அடுத்த ரூ. 500 000	8%
அடுத்த ரூ. 500 000	12%
அடுத்த ரூ. 500 000	16%
அடுத்த ரூ. 500 000	20%
மேலதிக எத்தொகைக்கும்	24%

(அட்டவணை 13.1 - மத்திய வங்கி அறிக்கை 2013)

உதாரணம் 1

ஒருவருடைய ஆண்டு வருமானம் ரூ. 575 000 எனின், அவ்வாண்டிற்கு 2011 ஆம் ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைப்படுத்தப்படும் வரி எல்லைகளுக்கேற்ப அவர் செலுத்த வேண்டிய வருமான வரியைக் கணிக்க.

அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்த வருமானம் = ரூ. 575 000

வருமான வரியிலிருந்து
விலக்களிக்கப்பட்ட தொகை = ரூ. 500 000

வரி அறவிடப்படும் வருமானம் = ரூ. 575 000 − 500 000

செலுத்த வேண்டிய வரி = ரூ. $75\ 000 \times \frac{4}{100}$

= ரூ. 3 000

உதாரணம் 2

ஒரு குறித்த வியாபாரியின் ஆண்டு வருமானம் ரூ. 1 650 000 எனின், 2011 இலிருந்து நடைமுறைப்படுத்தப்படும் வரி எல்லைகளுக்கேற்ப அவர் அவ்வாண்டிற்காகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வருமான வரியைக் கணிக்க.

முதலில் ஆண்டு வருமானத்தைக் கீழே காட்டியுள்ளவாறு வேறாக்கிக்கொள்வோம்.

$$\underbrace{1650\ 000}_{\text{ஆண்டு வருமானம்}} = \underbrace{500\ 000}_{\text{வருமானத்தில் வரி விலக் களிக்கப்பட்ட தொகை}} + \underbrace{500\ 000}_{4\%\ \text{வரிச் சதவீதம்}} + \underbrace{500\ 000}_{8\%\ \text{வரிச் சதவீதம்}} + \underbrace{150\ 000}_{12\%\ \text{வரிச் சதவீதம்}}$$

வருமான வரியிலிருந்து
விலக்களிக்கப்பட்ட தொகை = ரூ. 500 000

அடுத்த ரூ.500 000 இற்கு
அறவிடப்படும் வரி = ரூ. $500\ 000 \times \frac{4}{100}$

= ரூ. 20 000

அடுத்த ரூ. 500 000 இற்கு
அறவிடப்படும் வரி = ரூ. $500\ 000 \times \frac{8}{100}$
= ரூ. 40 000

அடுத்த ரூ. 150 000 இற்கு
அறவிடப்படும் வரி = ரூ. $150\ 000 \times \frac{12}{100}$
= ரூ. 18 000

செலுத்த வேண்டிய மொத்த
வருமான வரி = ரூ. 20 000 + ரூ. 40 000 + ரூ. 18 000
= ரூ. 78 000

பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரி (VAT)

ஒரு குறித்த பொருளைக் கொள்வனவு செய்யும்போது அல்லது சேவையைப் பெறும்போது அதன் மொத்தப் பெறுமானத்தில் ஒரு குறித்த சதவீதம் பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரியாக அறவிடப்படும். பொருள்களை விற்பவர் அல்லது சேவையை வழங்குபவர் இவ்வரியை நுகர்வோரிடமிருந்து அறவிடும் அதே வேளை அதனை அரசாங்கத்திடம் செலுத்தக் கடமைப்பட்டுள்ளார்.

உதாரணம் 1

ஒருவருடைய ஒரு குறித்த மாதத் தொலைபேசிக் கட்டணச் சிட்டை ரூ. 2 500 ஆகும். அதற்காக 15% பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரி விதிக்கப்படுமெனின், அவர் செலுத்த வேண்டிய தொலைபேசிச்சிட்டையின் மொத்தப் பெறுமானம் யாது?

முறை I

பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரி $= \text{ரூ. } 2\ 500 \times \frac{15}{100}$

$= \text{ரூ. } 375$

செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பெறுமானம் $= \text{ரூ. } 2\ 500 + 375$

$= \text{ரூ. } 2\ 875$

முறை II

$\text{ரூ. } 2\ 500 \times \frac{115}{100}$

$= \text{ரூ. } 2\ 875$

உதாரணம் 2

ஒரு குறித்த சப்பாத்து உற்பத்தி நிறுவனத்தினால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட சப்பாத்துச் சோடி ஒன்றின் விலை அமையும் விதம் கிழே தரப்பட்டுள்ளது.

மூலப் பொருள்கள்	-	ரூ. 1 200
உற்பத்திச் செலவு	-	ரூ. 300
ஏனைய செலவுகள்	-	ரூ. 200
மொத்தப் பெறுமானம்	-	ரூ. 1 700

சப்பாத்துச் சோடி ஒன்றை விற்கும்போது இலாபமாக ரூ. 250 ஐயும் 15% பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரியையும் நுகர்வோர் செலுத்த நேரிட்டால், சப்பாத்துச் சோடியின் விற்பனை விலை யாது?

இலாபத்துடன் குறிக்கப்பட்ட விலை $= \text{ரூ. } 1\ 700 + \text{ரூ. } 250 = 1\ 950$

செலுத்த வேண்டிய வரி $= \text{ரூ. } 1\ 950 \times \frac{15}{100}$

$= \text{ரூ. } 292.50$

சப்பாத்துச் சோடியின் விற்பனை விலை $= \text{ரூ. } 1\ 950 + \text{ரூ. } 292.50$

$= \text{ரூ. } 2\ 242.50$

பயிற்சி 14.1

1. ஆண்டுப் பெறுமானம் ரூ. 15 000 என மதிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒரு வீட்டிற்கு உரிய உள்ளூராட்சி மன்றம் 5 % இறை வரியை அறவிடுமெனின், ஓர் ஆண்டுக்காகச் செலுத்த வேண்டிய இறை வரியைக் கணிக்க.

2. ஆண்டுப் பெறுமானம் ரூ. 18 000 என மதிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒரு கடைக்காகச் செலுத்த வேண்டிய இறை வரி 6% எனின்,

(i) ஓர் ஆண்டிற்குச் செலுத்த வேண்டிய இறை வரி யாது?

(ii) ஒரு காலாண்டிற்குச் செலுத்த வேண்டிய இறை வரி யாது?

3. ஒரு நகர சபை எல்லைக்குள்ளே இருக்கும் ஆண்டுப் பெறுமானம் ரூ. 18 000 என மதிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒரு வீட்டிற்காக ஒரு காலாண்டிற்குச் செலுத்த வேண்டிய இறை வரி ரூ. 270 எனின், நகர சபை அறவிடும் இறை வரிச் சதவீதத்தைக் கணிக்க.

4. 8% இறை வரியை அறவிடும் மாநகரசபை எல்லைக்குள்ளே இருக்கும் ஒரு சிற்றுண்டிச்சாலையிலிருந்து ஒரு காலாண்டிற்கு அறவிடப்படும் இறைவரி ரூ. 1200 எனின் , சிற்றுண்டிச் சாலையின் ஆண்டுப் பெறுமானம் யாது?

5. ஆண்டுப் பெறுமானம் ரூ. 30 000 என மதிப்பிட்டுள்ள ஒரு வீட்டின் உரிமை யாளராகிய திரு.சில்வா அவ்வீட்டை ரூ. 3 000 மாத வாடகைக்கு ஓர் ஆண்டிற் காகத் திரு பெரேராவிடம் வாடகைக்குக் கொடுத்துள்ளார். வீடு அமைந்துள்ள பிரதேச சபை ஆண்டு மதிப்பீட்டில் 4% ஐ இறைவரியாக அறவிடும் அதே வேளை வீட்டின் பராமரிப்புக்குக் கிடைக்கும் வாடகையில் 15 % ஐத் திரு சில்வா செலவிடுகின்றார். ஆண்டின் இறுதியில் திரு சில்வாவிடம் எஞ்சியிருக்கும் பணம் யாது?

6. ஒரு குளிரேற்றியின் இறக்குமதி விலை ரூ. 40 000 ஆகும். குளிரேற்றிக்காக அறவிடப்படும் தீர்வைச் சதவீதம் 20% எனின், செலுத்த வேண்டிய தீர்வைப் பணத்தைக் கணிக்க.

7. ரூ. 12 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு கமராவை இறக்குமதி செய்கையில் செலுத்த நேரிடும் தீர்வைப் பணம் ரூ. 3 000 எனின், அறவிடப்பட்டுள்ள தீர்வைச் சத வீதம் யாது?

8. முச்சக்கர வண்டிகளை இறக்குமதிசெய்கையில் 50% தீர்வை அறவிடப்படு கின்றது. தீர்வையைச் செலுத்திய பின்னர் ஒரு முச்சக்கர வண்டியின் பெறுமானம் ரூ. 450 000 எனின், தீர்வையைச் செலுத்து முன்பாக முச்சக்கர வண்டியின் பெறுமானம் யாது?

9. ரூ. 50 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு தொகைத் தைத்த ஆடைகளை ஏற்றுமதி செய்கையில் 12% தீர்வை அறவிடப்படுமெனின், தீர்வையைச் செலுத்திய பின்னர் பெறுமானம் யாது?

10. ஒரு குறித்த வகை மோட்டார் சைக்கிளை இறக்குமதி செய்கையில் அதன் பெறுமானத்தில் 15% ஐத் தீர்வையாகச் செலுத்துதல் வேண்டும். மோட்டார் சைக்கிளின் இறக்குமதிப் பெறுமானம் ரூ. 175 000 ஆகும்.

(i) தீர்வையைச் செலுத்திய பின்னர் மோட்டார் சைக்கிளின் பெறுமானம் யாது?
(ii) 10% இலாபம் கிடைக்குமாறு மோட்டார் சைக்கிள் விற்கப்பட வேண்டிய விலை யாது?

11. ஒருவருடைய ஆண்டு வருமானம் ரூ. 550 000 எனின், 2011 ஆம் ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைப்படுத்தப்படும் வருமான வரி எல்லைகளுக்கேற்ப (அட்டவணை 13.1) அவர் செலுத்த வேண்டிய வருமான வரி யாது?

12. ஆண்டு வருமானம் ரூ. 1 800 000 ஆகவுள்ள ஒருவர் அட்டவணை 13.1 இற் கேற்பச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வருமான வரி யாது?

13. ஒரு வியாபாரி ஓர் ஆண்டில் செலுத்திய வருமான வரி ரூ. 56 000 எனின், 2011 ஆண்டில் நடைமுறைப்படுத்தப்பட்ட வரி எல்லைகளுக்கேற்ப (அட்டவணை 13.1) அவருடைய ஆண்டு வருமானம் யாது?

14. ஒரு வீட்டின் மாதத் தொலைப்பேசிக் கட்டணத்திற்காக அறவிடப்படும் பணம் ரூ. 1200 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதற்காக அறவிடப்பட்ட பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரிச் சதவீதம் 10% எனின், செலுத்த வேண்டிய சிட்டையின் மொத்தப் பெறுமானம் யாது?

15. ஒரு மோட்டார் வாகனத்தை இறக்குமதி செய்த ஒருவர் செலுத்த நேரிட்ட செலவுகள் பின்வருமாறு:

இறக்குமதி விலை	- ரூ. 600 000
அறவிட்ட தீர்வை	- ரூ. 400 000
இறக்குதல், போக்குவரத்து என்பவற்றுக்கான கூலி	- ரூ. 50 000

இவ்வெல்லாச் செலவுகளுக்கும் 15% பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரி அறவிடப்படுமெனின், மோட்டார் வாகனத்திற்காக அவர் செலவிட்ட மொத்தப் பணம் யாது?

16. ஒரு வீட்டின் மாத நீர்ச் சிட்டைக்காக 15% பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரி அறவிடப்படுகின்றது. வீட்டின் நீர்ச் சிட்டைக்காகச் செலுத்திய மொத்தப் பணம் ரூ. 1 775 எனின்,பெறுமதி சேர்க்கப்பட்ட வரியைச் சேர்ப்பதற்கு முன்னர் நீர்ச் சிட்டையின் பெறுமானம் யாது?

வட்டி

ஒருவரிடமிருந்து அல்லது ஒரு குறித்த நிறுவனத்திலிருந்து பெற்ற கடனிற்காக ஒரு குறித்த காலத்திற்குப் பின்னர் செலுத்துவதற்கு நேரிடும் மேலதிகப் பணம் **வட்டி** எனப்படும். அவ்வாறே வங்கியில் அல்லது வேறு நிதி நிறுவனத்தில் வைப்புச் செய்த பணத்திற்காகவும் ஒரு குறித்த காலத்திற்குப் பின்னர் கிடைக்கும் மேலதிக பணம் வட்டி எனப்படும்.

எளிய வட்டி

மாதந்தோறும் அல்லது ஆண்டுதோறும் வட்டியைக் கணிக்கும்போது அதற்கு அடிப்படையாய் அமைந்த தொடக்கப் பணம் மாத்திரம் கருதப்படுமெனின், அவ்வாறு கணிக்கப்படும் வட்டி **எளிய வட்டி** எனப்படும்.

உதாரணம் 1

10% ஆண்டு வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ. 5 000 ஐக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் அக் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்கு இரு ஆண்டுகள் எடுத்தன. அவர் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி யாது?

ஓர் ஆண்டிற்காகச் செலுத்த வேண்டிய எளிய வட்டி $= \text{ரூ. } 5\,000 \times \frac{10}{100}$

$= \text{ரூ. } 500$

இரு ஆண்டுகளுக்காகச் செலுத்த வேண்டிய எளிய வட்டி $= \text{ரூ. } 500 \times 2$

$= \text{ரூ. } 1\,000$

உதாரணம் 2

2% மாத எளிய வட்டிற்கு ரூ. 8000 ஐக் கடனாகப் பெற்ற கண்ணன் 3 மாதங்களுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்குச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

ஒரு மாதத்திற்குச் செலுத்த வேண்டிய வட்டி $= \text{ரூ. } 8\,000 \times \frac{2}{100}$

$= \text{ரூ. } 160$

மூன்று மாதங்களுக்காகச் செலுத்த வேண்டிய வட்டி $= \text{ரூ. } 160 \times 3$

$= \text{ரூ. } 480$

மூன்று மாதங்களுக்குப் பின் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் $=$ ரூ. 8 000 + ரூ. 480

$=$ ரூ. 8 480

உதாரணம் 3

12% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ. 10 000 ஐக் கடனாகக் கொடுத்த ஒருவருக்கு வட்டியாக ரூ. 3600 எவ்வளவு காலத்திற்குப் பின்னர் கிடைக்கும்?

ஓர் ஆண்டிற்காகக் கிடைத்த எளிய வட்டி $=$ ரூ. 10 000 $\times \frac{12}{100}$

$=$ ரூ. 1 200

வட்டியாக ரூ. 3600 கிடைக்கும் ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{3\,600}{1\,200}$

$=$ 3 ஆண்டுகள்

உதாரணம் 4

எளிய வட்டிக்குக் கடனாகப் பெற்ற ரூ. 7 500 இற்கு இரு ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் செலுத்த நேரிட்ட வட்டி ரூ. 1 200 எனின், அறவிடப்பட்ட ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

இரு ஆண்டுகளுக்கான வட்டி $=$ ரூ. 1 200

ஓர் ஆண்டுக்கான வட்டி $=$ ரூ.1 200 $\div$ 2

$=$ ரூ. 600

ஆண்டு வட்டி வீதம் $= \frac{600}{7\,500} \times 100\%$

$= 8\%$

உதாரணம் 5

ஆண்டுதோறும் 7.5% எளிய வட்டியைச் செலுத்துவதன் பேரில் ரூ. 25 000 ஐக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் எவ்வளவு காலத்திற்குப் பின்னர் மொத்தமாக ரூ. 28 750 ஐச் செலுத்த நேரிடும்?

ஓர் ஆண்டிற்கான வட்டி $=$ ரூ. 25 000 $\times \frac{7.5}{100}$

$=$ ரூ. 1 875

செலுத்திய மொத்த வட்டி $=$ ரூ. 28 750 $-$ ரூ. 25 000

$=$ ரூ. 3 750

வட்டி செலுத்தப்பட்ட காலம் $= \dfrac{3\ 750}{1\ 875}$

$= 2$ ஆண்டுகள்

உதாரணம் 6

1.5% மதாந்த எளிய வட்டி வீதப்படி கடனைப் பெற்ற ஒருவர் 4 மாதங்களின் பின் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்கு மொத்தத் தொகையாக ரூ. 5300 ஐச் செலுத்தினாரெனின், அவர் பெற்ற கடன் தொகை யாது?

''மாத வட்டி வீதம் 1.5 %'' என்பது ''ரூ. 100 இற்கு ஒரு மாதத்திற்கான வட்டி ரூ. 1.50 '' என்பதாகும்

அதாவது,

ரூ. 100 இற்கு ஒரு மாத வட்டி = ரூ. 1.5

$\therefore$ ரூ. 100 இற்கு 4 மாத வட்டி = ரூ. 1.5×4 = ரூ. 6

$\therefore$ ரூ. 100 இற்கு 4 மாத முடிவில் செலுத்த வேண்டிய தொகை = ரூ. $100 + 6$ = ரூ. 106

$\therefore$ 4 மாத முடிவில் ரூ. 106 இற்கு செலுத்த வேண்டிய கடன் தொகை = ரூ. 100

$\therefore$ 4 மாத முடிவில் ரூ. 5300 இற்கு செலுத்த வேண்டிய கடன் தொகை $= \dfrac{100}{106} \times 5300$

= ரூ. 5000

பயிற்சி 14.2

1. ஓர் ஆண்டிற்கு 12% எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ. 5 000 கடனிற்காக 3 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் எளிய வட்டி யாது?

2. 1.5% மாத வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ. 50 000 ஐ ஒரு வங்கியில் வைப்புச் செய்த ஒருவர் ஒரு மாதத்திற்குக் கிடைக்கும் வட்டியைத் திரும்பப் பெற்றால், 6 மாதங்களில் அவருக்குக் கிடைக்கும் வட்டி யாது?

3. ஒரு மாதத்திற்கு 3% இல் ரூ. 2 500 இற்காக 1 ஆண்டு 5 மாதங்களில் செலுத்த வேண்டிய எளிய வட்டியைக் காண்க.

4. ரூ. 500 ஐக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் ஓர் ஆண்டிற்குப் பின்னர் ரூ. 560 ஐச் செலுத்திக் கடனிலிருந்து விடுபட்டால், கடனிற்காக அறவிடப்பட்டுள்ள ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

5. ஓர் ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ. 6 000 ஐக் கடனாகக் கொடுத்த ஒருவருக்கு 4 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் வட்டியாக ரூ. 3 600 கிடைத்தால், அறவிடப்பட்ட ஆண்டு எளிய வட்டி வீதம் யாது?

6. ரூ. 600 ஐக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் 1 ஆண்டு 3 மாதங்களுக்குப் பின்னர் வட்டியாக ரூ. 135 ஐச் செலுத்தினால், அறவிடப்பட்டுள்ள மாத வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

7. ரூ. 8 000 ஐக் கடனாகக் கொடுத்த ஒருவருக்கு 2 ஆண்டுகளின் இறுதியில் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் ரூ. 9 680 எனின், அறவிடப்பட்டுள்ள ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

8. ஆண்டு எளிய வட்டி வீதம் 8% இல் ரூ. 6 000 இற்குக் கிடைக்கும் வட்டி கிடைப்பதற்கு ரூ. 5 000 ஐ என்ன ஆண்டு வட்டி வீதத்தின் கீழ் கடனாகக் கொடுத்தல் வேண்டும்?

9. 12% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்திற்கு ரூ. 1500 ஐக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் எவ்வளவு காலத்திற்குப் பின்னர் வட்டியாக ரூ. 540 ஐச் செலுத்த நேரிடும்?

10. ஒரு மாதத்திற்கு 3% எளிய வட்டிச் சதவீதத்தின் கீழ் ரூ. 2000 கடனிற்காக வட்டி ரூ. 420 எவ்வளவு காலத்திற்குப் பின்னர் கிடைக்கும்?

11. ரூ. 6 000 ஐ 18% ஆண்டு எளிய வட்டிற்குக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் எவ்வளவு காலத்திற்குப் பின்னர் ரூ. 9240 ஐச் செலுத்திக் கடனிலிருந்து விடுபடலாம்?

12. 10% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்திற்கு ரூ. 2 500 ஐக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் மொத்தமாக ரூ. 5 000 ஐ எவ்வளவு காலத்திற்குப் பின்னர் செலுத்த நேரிடும்?

13. 5% இல் மாத எளிய வட்டியைக் கொடுப்பதன் பேரில் ஒருவர் ரூ. 5 000 ஐக் கடனாகப் பெற்றார். ஆறு மாதங்களுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்குச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

14 ஆண்டுதோறும் 15% எளிய வட்டிக்குக் கடனாகப் பெற்ற ரூ. 8 000 இற்காக 3 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

15. 3% மாத எளிய வட்டி வீதத்திற்குப் பெற்ற கடனிற்காக 8 மாதங்களுக்குப் பின்னர் செலுத்த நேரிட்ட மொத்தப் பணம் ரூ. 3 100 எனின், கடனாகப் பெற்ற பணத்தைக் காண்க.

16. இரண்டு ஆண்டுகளின் இறுதியில் ரூ. 5 000 ஐச் செலுத்திக் கடனிலிருந்து விடுபடுவதன் பேரில் ஒருவர் எளிய வட்டிக்குக் கடனைப் பெற்றார். எனினும் இக்கொடுக்கல் வாங்கல் 5 ஆண்டுகளுக்கு நீடித்தமையால் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்கு ரூ. 6 500 ஐச் செலுத்த நேரிட்டது?

(i) ஓர் ஆண்டிற்காக அவர் செலுத்தியுள்ள வட்டியைக் கணிக்க
(ii) அவர் கடனாகப் பெற்ற பணம் யாது?
(iii) கடனிற்காக அறவிடப்பட்ட ஆண்டு வட்டி வீதம் யாது?

17. ஒருவர் ஆண்டு எளிய வட்டி வீதம் R இன் கீழ் கடன் தொகை P யை T ஆண்டுகளுக்குக் கடனாகப் பெற்றால்,

(i) ஒரு மாதத்தில் அவர் செலுத்த வேண்டிய வட்டியிற்கான ஒரு கோவையை எழுதுக.
(ii) T ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி I யிற்கான ஒரு கோவையை எழுதுக.
(iii) $P = 4\ 000$, $R = 8\%$, $T = 5$ எனின், மேலே (ii) இல் பெற்ற கோவையில் பிரதியிட்டு வட்டி I யைக் கணிக்க.

15 சமன்பாடுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளை உருவாக்கவும் தீர்க்கவும்
- ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்கவும் தீர்க்கவும்
- இருபடிச் சமன்பாடுகளை காரணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்

எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்.

எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது தொடர்பாக நீங்கள் இதற்கு முன்னர் பெற்றுள்ள அறிவை மீட்டுவதற்காகப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுவோம்.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

a. $2x+8=x+12$ **b.** $2(x-3)=4$ **c.** $5x-8=2(3-x)$

d. $2(y+3)=3(y-1)$ **e.** $4-5(3-p)=2(p-1)$ **f.** $\frac{x}{2}+1=3$

g. $5-\frac{x}{4}=1$ **h.** $3-\frac{2x}{5}=1$ **i.** $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=7$

j. $\frac{5x-2}{4}=2$ **k.** $\frac{(a-3)}{2}+1=4$ **l.** $\frac{(x+1)}{2}+\frac{(x-3)}{4}=\frac{1}{2}$

15.1 மேலும் எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்கி தீர்க்கும் முறையை மேலும் கவனிப்போம். மேலேயுள்ள பயிற்சியிலுள்ள சில சமன்பாடுகளில் பின்ன உறுப்புகள் சேர்ந்துள்ளன. சில பின்ன உறுப்புகளில் தெரியாக் கணியங்கள் (x, y, p, a) உள்ளடங்கியுள்ளன ஆயினும் x எப்போதுமே அப்பின்னங்களில் தொகுதியில் அமைந்திருந்ததை நீங்கள் அவதானித்தீர்களா? இனி நாம் தயாராவது தெரியாக் கணியமாகிய x பின்னங்களில் பகுதியில் உள்ளபோது சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் முறையைக் கவனத்தில்

கொள்வதற்காகும். அதற்காக முதலில் அவ்வாறான ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்கி அதனைத் தீர்ப்போம்

யாதாயினும் இரண்டு எண்களினால் பன்னிரண்டு வகுக்கப்படுகின்றதுடன், வகுக்கப்படும் எண்களில் ஓர் எண் மற்றைய எண்ணின் இரண்டு மடங்காகும். அவற்றை வகுக்கும்போது கிடைக்கும் விடைகளுக்கிடையிலான வித்தியாசம் 2 ஆகும். இரண்டு எண்களையும் காண்க.

இதனை மாணவர் ஒருவர் மனக்கணிதம் மூலம் தீர்க்கும் முறையைப் பார்ப்போம்.

முயற்சி ① : இரண்டு எண்களும் 2,4 ஆக இருக்க முடியுமா?

$\frac{12}{2}=6$, $\frac{12}{4}=3$; அப்போது $6-3=3$ ஆகும். இது பொருத்தமற்றது.

முயற்சி ② : இரண்டு எண்களும் 6,12 ஆக இருக்க முடியுமா?

$\frac{12}{6}=2$, $\frac{12}{12}=1$; அப்போது , $2-1=1$ ஆகும். இது பொருத்தமற்றது.

முயற்சி ③: இரண்டு எண்களும் 3,6 ஆக இருக்க முடியுமா?

$\frac{12}{3}=4$, $\frac{12}{6}=2$; அப்போது , $4-2=2$ ஆகும். இது பொருந்தும்.

மேற்குறித்த முறைகளில் முயன்று தவறுதல் மூலம் அதனைத் தீர்க்கலாம். ஆயினும் முயன்று தவறுதல் முறையில் எல்லாப் பிரசினங்களையும் தீர்க்க முடியுமா? சில பிரசினங்களைஅம்முறையில்தீர்ப்பது மிக நீளமானதாகும். இன்னும் சில பிரசினங்களை அம்முறையில் தீர்க்க முடியாது. மேற்குறித்தவாறான பிரசினம் தீர்த்தலுக்கான மிகப் பொருத்தமான முறையாக அட்சரகணிதத்தில் வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலைக் குறிப்பிடலாம். இனி நாம் ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்கி அதனைத் தீர்க்கும் முறையை ஆராய்ந்து பார்ப்போம். 12 ஆனது x என்னும் எண்ணால் வகுக்கப்பட்டது எனக் கருதுவோம். அப்போது மற்றைய எண்ணை $2 \times x = 2x$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

அப்போது , 12 ஐ x ஆல் வகுத்துப் பெறப்படும் விடை $\frac{12}{x}$ ஆகும்.

12 ஐ x இன் இருமடங்காகிய $2x$ ஆல் வகுத்துப் பெறப்படும் விடை $\frac{12}{2x}$ ஆகும்.

இரண்டு விடைகளுக்கிடையிலான வித்தியாசம் 2 என்பதால்,

$\frac{12}{x}-\frac{12}{2x}=2$ ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதால் பெறப்படும் x இன் பெறுமானமானது எமக்குத் தேவையான எண் ஆகும். இப்போது இச்சமன்பாட்டைத் தீர்ப்போம்.

இது பகுதியில் அட்சரகணித உறுப்பைக் கொண்ட ஒரு சமன்பாடாகும். முதல் பின்னத்தில் பகுதியில் x உண்டு. இரண்டாம் பின்னத்தில் பகுதியில் $2x$ உண்டு. இப்பின்னங்களின் பகுதிகளைச் சமப்படுத்திக் கொள்வோம். இதற்கு இலகுவான வழி $\frac{12}{x}$ இற்குப் பதிலாக அதற்குச் சமவலுப் பின்னமாகின்ற $\frac{12\times 2}{x\times 2}$ அதாவது $\frac{24}{2x}$ ஐ எழுதுவதாகும்.

$$\frac{24}{2x} - \frac{12}{2x} = 2$$

இனி சமன்பாட்டின் இடது கைப்பக்கத்தை ஒரு தனிப்பின்னமாக எழுதும்போது பெரும்பாலும் எளிமையான ஒரு சமன்பாடு பெறப்படும்.

$$\frac{12}{2x} = \frac{2}{1}$$

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கான தீர்க்கக் கூடிய பல முறைகள் உண்டு.
நாம் அதனை இவ்வாறு தீர்போம்.

அதாவது $12\times 1 = 2\times 2x$

$$4x = 12$$

சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்காக இரு பக்கமும் 4 ஆல் வகுப்போம்.

$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$$

$$x = 3$$

$\therefore$ 12 ஆனது 3 ஆல் வகுக்கப்பட்டது என்பது தெளிவாகும்.

இப்போது இன்னுமொரு சந்தர்ப்பத்தைப் பார்ப்போம்.

60 மாங்காய்கள் சில நண்பர்களுக்குச் சமமாகப் பகிர்ந்தளிக்கப்பட்டது. அவர்களில் ஒருவரான அமலன் தனக்குக் கிடைத்த காய்களில் 3 ஐ விற்ற பின்னர் அவனிடம் 2 காய்கள் எஞ்சியிருந்தன. 60 மாங்காய்களையும் பகிர்ந்து கொண்ட நண்பர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

உண்மையாகவே இப்பிரசினத்தை மனக்கணித ரீதியில் மிக இலகுவாகத் தீர்க்கலாம். ஆயினும், சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல், தீர்த்தல் என்பவற்றுக்கு உதாரணமாக இப்பிரசினத்தை இவ்வாறு தீர்ப்போம்.

நண்பர்களின் எண்ணிக்கை x என்போம்.

அப்போது ஒருவருக்குக் கிடைத்த மாங்காய்களின் எண்ணிக்கை $= \frac{60}{x}$

அமலன் விற்பனை செய்த மாங்காய்களின் எண்ணிக்கை $= 3$

அப்போது அவனிடம் எஞ்சிய மாங்காய்களின் எண்ணிக்கை $= \frac{60}{x} - 3$

மேலும் அவனிடம் எஞ்சிய மாங்காய்களின் எண்ணிக்கை 2 என்பதால் $\frac{60}{x} - 3 = 2$ ஆகும்.

$$\frac{60}{x} - 3 + 3 = 2+3$$

$$\frac{60}{x} = 5$$

$$5x = 60$$

$$x = 12$$

$\therefore$ நண்பர்களின் எண்ணிக்கை 12 ஆகும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்த்துள்ள முறையை அவதானிக்க.

உதாரணம் 1

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{a} = \frac{1}{2}$$

$$a = 10$$

உதாரணம் 2

$$\frac{3}{(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$1\times(x+2) = 2\times 3$$

$$x+2 = 6$$

$$x = 4$$

உதாரணம் 3

$$\frac{2}{(x+5)} = \frac{3}{2(x-3)}$$

$$4(x-3) = 3(x+5)$$

$$4x-12 = 3x+15$$

$$4x-3x = 15+12$$

$$x = 27$$

உதாரணம் 4

$$\frac{2}{(x-1)} - \frac{1}{(x+2)} = 0$$

$$\frac{2(x+2)-1(x-1)}{(x-1)(x+2)} = 0$$

$$2(x+2) - (x-1) = 0$$

$$2x+4-x+1 = 0$$

$$x = -5$$

பயிற்சி 15.1

1. ஒரு தந்தை ரூ. 270 ஐத் தனது பிள்ளைகளுக்குச் சமமாகப் பகிர்ந்தளித்தார். அப்போது ஒருவர் பெற்ற பணம் ரூ. 45 ஆகும். அவரது பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையை x எனக் கொண்டு ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக. சமன்பாட்டைத் தீர்த்து அவரது பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

2. $\frac{3}{5}$ என்னும் பின்னத்தில் பகுதியிலும் தொகுதியிலும் ஒரே எண்ணைக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படும் பின்னம் $\frac{8}{10}$ ஆகும். கூட்டிய எண் யாது?

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

a. $\frac{5}{m}+\frac{2}{m}=\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{3}{5x}+\frac{1}{x}=2$ **c.** $\frac{5}{6x}-\frac{2}{3x}=\frac{1}{6}$

d. $\frac{4}{5x}-\frac{1}{3x}=\frac{7}{30}$ **e.** $\frac{21}{4m+1}=3$ **f.** $\frac{3}{x+2}=\frac{3}{7}$

g. $\frac{10}{a-3}=\frac{5}{8}$ **h.** $\frac{4}{x+1}=\frac{3}{x-2}$ **i.** $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x+8}$

j. $\frac{1}{a+1}+\frac{3}{a+1}=\frac{2}{3}$ **k.** $\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x-2}=2$ **l.** $\frac{5}{2(p+1)}+\frac{1}{p+1}=\frac{7}{8}$

m. $\frac{3}{x+2}-\frac{1}{3(x+2)}=\frac{8}{15}$ **n.** $\frac{1}{2x-3}+\frac{4}{x+3}=0$ **o.** $\frac{15}{2(p+1)}-\frac{3}{p+1}=2$

p. $\frac{1}{a-1}+\frac{3}{4}=\frac{4}{a-1}$ **q.** $\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{3}=2$ **r.** $\frac{x+1}{x+3}=\frac{4}{5}$

15.2 ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

தெரியாக் கணியங்களின் குணகங்கள் சமமாகவுள்ள சந்தர்ப்பங்களில் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்த முறை உங்களுக்கு நினைவில் உள்ளதா? கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியைக் கவனிக்க.

$$2x+y=5$$

$$2x+3y=8$$

இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் தெரியாக் கணியம் x இன் குணகம் 2 ஆகும். அவை சமன் என்பது தெளிவாகிறது. இவ்வாறான ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் (அதாவது தெரியாக் கணியத்தின் குணகம் சமனாகும்). ஒவ்வொரு தெரியாக் கணியத்தின் குணகங்கள் சமனற்றவையாயிருப்பின் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறை பற்றி ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

கமலா, மாலா ஆகியோரிடம் ஒரு குறித்த தொகைப் பணம் உண்டு. கமலாவிடம் உள்ள பணத்துடன் மாலாவிடம் உள்ள பணத்தின் இரு மடங்கைக் கூட்டும்போது ரூ. 110 ஆகும். கமலாவிடம் உள்ள பணத்தின் இரு மடங்குடன் மாலாவிடம் உள்ள பணத்தின் மூன்று மடங்கைக் கூட்டும்போது ரூ. 190 பெறப்படும். இருவரிடமும் உள்ள பணத்தை வெவ்வேறாகக் காண்க. இப்பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தும் முறை பற்றி ஆராய்வோம். கமலாவிடம் உள்ள பணம் ரூ. x எனவும் மாலாவிடம் உள்ள பணம் ரூ. y எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது, கமலாவிடம் உள்ள பணத்துடன் மாலாவிடம் உள்ள பணத்தின் இரு மடங்கைக் கூட்டும்போது, ரூ. $x + 2y$ எனப் பெறப்படும் .

அது ரூ. 110 யிற்கு சமம் என்பதால் $x + 2y = 110$ ஆகும்.

அப்போது, $x + 2y = 110$ ——— (1)

கமலாவிடம் உள்ள பணத்தின் இரு மடங்குடன் மாலாவிடம் உள்ள பணத்தின் மூன்று மடங்கினைக் கூட்டும்போது, $2x + 3y = 190$ ஆகும்.
அப்போது,

$2x + 3y = 190$ ——— (2)

இச்சமன்பாடுகளில் x உறுப்புகளின் குணகங்களோ y உறுப்புகளின் குணகங்களோ சமனானவை அல்ல. எனவே முதலில் ஒரு தெரியாக் கணியத்தின் குணகத்தைச் சமப்படுத்த வேண்டும். சமன்பாடு (1) இல் x இன் குணகத்தை 2 ஆக மாற்றுவதற்கு 2 ஆல் பெருக்குவோம். $\therefore\ 2x + 4y = 220$ ——— (3)

இப்போது இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் x இன் குணகம் சமனாக உள்ளது. இனி இரண்டாம் மூன்றாம் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்போம்.

$\therefore$ (3) $-$ (2) இதிலிருந்து $2x + 4y - (2x + 3y) = 220 - 190$

$$2x + 4y - 2x - 3y = 30$$
$$y = 30$$

y யின் பெறுமானத்தை சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிடுவோம்.

$$x + 2y = 110$$
$$x + 2 \times 30 = 110$$
$$x + 60 = 110$$
$$x = 110 - 60$$
$$x = 50$$

$\therefore$ கமலாவிடம் உள்ள பணம் $=$ ரூ. 50

$\therefore$ மாலாவிடம் உள்ள பணம் $=$ ரூ. 30

உதாரணம் 2

தீர்க்க. $2m + 3n = 13$
$3m + 5n = 21$

$2m + 3n = 13$ ——— (1)

$3m + 5n = 21$ ——— (2) எனக் கொள்வோம்.

$① \times 3,\ 6m + 9n = 39$ ——— ③

$② \times 2,\ 6m + 10n = 42$ ——— ④

$④ - ③\ 6m + 10n - (6m + 9n) = 42 - 39$

$6m + 10n - 6m - 9n = 3$

$n = 3$

$n = 3$ ஐ சமன்பாடு ① இல் பிரதியிடுவதால்

$2m + 3n = 13$

$2m + 3 \times 3 = 13$

$2m = 13 - 9$

$2m = 4$

$\therefore\ m = 2$

$n = 3$

உதாரணம் 3

இரண்டு தோடம்பழங்களினதும் ஒரு செவ்விளநீரினதும் விலை ரூ. 80 ஆகும். இரண்டு தோடம்பழங்களுக்குச் செலவாகும் பணத்தைக் கொண்டு மூன்று செவ்விளநீர்களை வாங்கலாம். ஒரு தோடம்பழத்தினதும் செவ்விளநீரினதும் விலையை வேவ்வேறாகக் காண்போம்.

மேலேயுள்ள தகவல்களிலிருந்து இரண்டு சமன்பாடுகளை உருவாக்குவோம்.
ஒரு தோடம்பழத்தின் விலையை ரூ. x எனவும். ஒரு செவ்விளநீரின் விலையை ரூ. y எனவும் கொள்வோம்.
அப்போது இரண்டு தோடம்பழங்களினதும் ஒரு செவ்விளநீரினதும் விலை $= 2x + y$ ஆகும்.
அது ரூ. 80 என்பதால், $2x + y = 80$.
இரண்டு தோடம்பழங்களின் விலை மூன்று செவ்விளநீர்களின் விலைக்குச் சமன் என்பதால்,

$2x = 3y$ ஆகும்.

இனி, $2x + y = 80$ ——— ① எனவும்

$2x = 3y$ ——— ② எனவும் கொள்வோம்.

இவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளை மேலேயுள்ள உதாரணத்திலுள்ளவாறு செய்ய முடியுமெனினும் அதை விட இலகுவான ஒரு முறை இங்கு தரப்பட்டுள்ளது. அது ஒரு சமன்பாட்டை மற்றைய சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவதாகும்.
சமன்பாடு ① இல் $2x$ இற்குப் பதிலாக $3y$ ஐப் பிரதியிடுவதால்

$3y + y = 80$

$4y = 80$

$y = 20$

y யின் பெறுமானத்தை சமன்பாடு ① இல் பிரதியிடுவதால்

$2x + 20 = 80$

$2x = 60$

$x = 30$

எனவே, ஒரு தோடம்பழத்தின் விலை = ரூ. 30
ஒரு செவ்விளநீரின் விலை = ரூ. 20

உதாரணம் 4

தீர்க்க.

$x = 3y$

$2x + 3y = 18$

$x = 3y$ ——— (1)

$2x + 3y = 18$ ——— (2) எனக் கொள்வோம்.

சமன்பாடு (1) இன் x இன் பெறுமானத்தைச் சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிடுவதால்

$2 \times (3y) + 3y = 18$

$6y + 3y = 18$

$9y = 18$

$y = 2$

$y = 2$ ஐ சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிடுவதால்

$x = 3y$

$x = 3 \times 2$

$x = 6$

பயிற்சி 15.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $x + 2y = 10$
$2x - 5y = 2$

(ii) $x = 3y$
$x + 3y = 12$

(iii) $2m + n = 5$
$m + 2n = 4$

(iv) $3x + y = 14$
$2x + 3y = 21$

(v) $2x + 5y = 9$
$3x + 2y = 8$

(vi) $4m - 3n = 7$
$7m - 2n = 22$

(vii) $8x - 3y = 1$
$3x + 2y = 16$

(viii) $6x + 5y = 5$
$9x - 4y = 19$

(ix) $3x - 4y = 8(2 - y) + 1$
$2(2x + 3y) = 26 - y$

(x) $3x + 4y = 9$
$2x - 5y + 17 = 0$

2. சிறுவர் மேற்சட்டைகள் இரண்டினதும் காற்சட்டைகள் மூன்றினதும் மொத்த விலை ரூ. 1 150 ஆகும். சிறுவர் மேற்சட்டைகள் மூன்றினதும் ஒரு சிறுவர் காற்சட்டையினதும் மொத்த விலை ரூ. 850 ஆகும். ஒரு சிறுவர் மேற் சட்டையின் விலை ரூ. x எனவும் ஒரு சிறுவர் காற்சட்டையின் விலை ரூ. y எனவும் கொண்டு இரண்டு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்கி ஒரு சிறுவர் மேற்சட்டையினதும் ஒரு சிறுவர் காற்சட்டையினதும் விலையைக் காண்க.

3. ராதிகாவின் தந்தை அவளிடம் இவ்வாறு கூறினார். ''தற்போது எனது வயது உமது வயதின் நான்கு மடங்காகும் 8 ஆண்டுகளுக்கு முன்னர் நான் உங்களைப் போல் பன்னிரண்டு மடங்கு வயதுடையவனாயிருந்தேன்.'' தந்தையின் தற்போதைய வயது x வருடங்கள் எனவும் ராதிகாவின் தற்போதைய வயது y வருடங்கள் எனவும் கொண்டு இரண்டு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்கி ராதிகாவினதும் தந்தையினதும் வயதுகளைத் தனித்தனியே காண்க.

15.3 இருபடிச் சமன்பாடுகள்

$ax^2 + bx + c = 0$ வடிவிலான ஒரு சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாகும் $a \neq 0$ ($b = 0$ அல்லது $c = 0$ ஆயிருக்க முடியும்). இதற்காகக் கீழேயுள்ள சமன்பாடுகளை அவதானிப்போம்.

(i) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(ii) $2x^2 - 5x = 0$

(iii) $x^2 - 9 = 0$

மேலேயுள்ள மூன்று சமன்பாடுகளிலும் $a \neq 0$ ஆகும். ஆயினும் இரண்டாவது சமன்பாட்டில் $c = 0$ உம் மூன்றாவது சமன்பாட்டில் $b = 0$ உம் ஆகும். இம் மூன்று சமன்பாடுகளும் இருபடிச் சமன்பாடுகளாகும்.

இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முன்னர் பின்வரும் விடயங்களைக் கவனிப்போம்.

- எந்த ஓர் எண்ணையும் பூச்சியத்தால் பெருக்கும்போதும் பூச்சியம் பெறப்படும்.
- இரண்டு எண்களின் பெருக்கம் பூச்சியமாயின் அவற்றுள் குறைந்தது ஓர் எண் பூச்சியமாகும்.

இதற்கேற்ப , $(x - 1)\ (x - 3)$ என்னும் கோவை எச்சந்தர்ப்பங்களில் பூச்சியமாகிறது என்பதை ஆராய்வோம்.

$(x - 1)\ (x - 3)$ என்னும் கோவை பூச்சியமாவது $x - 1 = 0$ அல்லது $x - 3 = 0$ ஆகும்போது மாத்திரமேயாகும். அதாவது , $x = 1$ அல்லது $x = 3$ ஆகும் போது மாத்திரமேயாகும்.

இதற்கேற்ப, $(x - 1)\ (x - 3) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கவனிப்போம். $x = 1$ அல்லது $x = 3$ இச்சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கின்றது. அப்போது 1 , 3 என்பன $(x - 1)\ (x - 3) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனப்படும்.

இனி, $x^2 + 5x + 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கவனிப்போம்.

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)\ (x + 2)$ என்பதால், $x^2 + 5x + 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை $(x + 3)\ (x + 2) = 0$ என எழுதலாம்.

எனவே, $x + 3 = 0$ அல்லது $x + 2 = 0$ ஆகும்.

அப்போது, $x = -3$ அல்லது $x = -2$, $x^2 + 5x + 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கின்றன.

அதனைப் பின்வருமாறு வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

$x = (-3)$ ஆகும்போது, $x^2 + 5x + 6 = (-3)^2 + 5(-3) + 6$
$= 9 + (-15) + 6$
$= 0$

$x = (-2)$ ஆகும்போது, $x^2 + 5x + 6 = (-2)^2 + 5(-2) + 6$
$= 4 + (-10) + 6$
$= 0$

இதற்கேற்ப $x = -3$, $x = -2$ என்பன $x^2 + 5x + 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். அதாவது அவை சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

உதாரணம் 1

தீர்க்க: $x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

$x = 0$ அல்லது $x + 2 = 0$

$x = 0$ அல்லது $x = -2$

ஆகவே, $x = 0$ உம் $x = -2$ உம் இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 2

தீர்க்க: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x - 1)(x - 2) = 0$

$x - 1 = 0$ அல்லது $x - 2 = 0$

$x = 1$ அல்லது $x = 2$ ஆகும்.

ஆகவே, $x = 1$ உம் $x = 2$ உம் இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 3

தீர்க்க: $x^2 - 4x - 21 = 0$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$(x - 7)(x + 3) = 0$

$x - 7 = 0$ அல்லது $x + 3 = 0$

$x = 7$ அல்லது $x = -3$

$\therefore$ $x = 7$ உம் $x = -3$ உம் இச்சமன்பாட்டின் மூலகங்களாகும்.

குறிப்பு: நிறைவர்க்கச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வானது இரண்டு தரம் எழுதப்பட வேண்டும்.

பயிற்சி 15.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

1. $(x-2)(x-3)=0$
2. $(x+2)(x-5)=0$
3. $(x-4)(x-4)=0$
4. $(x-1)(2x-1)=0$
5. $x(x+3)=0$
6. $y(2y-3)=0$
7. $x^2-16=0$
8. $4x^2-1=0$
9. $9x^2-27x=0$
10. $x^2+15x+36=0$
11. $2x^2-5x+2=0$
12. $2x^2-5x=0$
13. $2x^2=6x$
14. $x^2=25$
15. $(x+3)^2=16$
16. $x^2=9x+36$
17. $(2x-3)^2=0$
18. $2x^2-5x=7$
19. $(x-1)(x-2)=2x^2-3x-2$
20. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{3x+2}{x}$

16

இணைகரங்கள் I

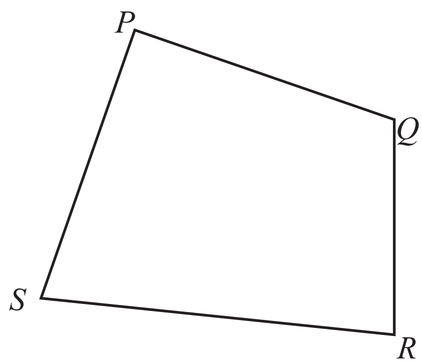
இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,

- இணைகரங்களின் பண்புகள் பற்றி அறியத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

இணைகரங்கள்

நான்கு நேர்கோட்டுத் துண்டங்களினால் மூடப்பட்டுள்ள தள உருவம் ஒரு நாற்பக்கலாகும். ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் எதிர்க் கோணங்கள் பற்றி ஆராய்வோம்.

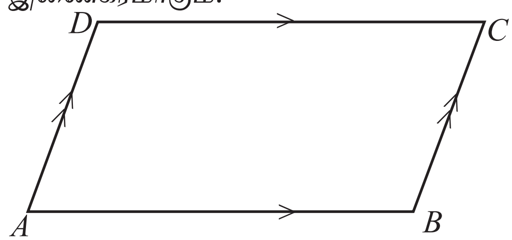


நாற்பக்கல் $PQRS$ இல்,

PQ, SR ஆகியன ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் ஆவதுடன் மற்றைய சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் PS, QR ஆகும்.

$S\hat{P}Q$, $S\hat{R}Q$ ஆகியன ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் ஆவதுடன் மற்றைய எதிர்க் கோணச் சோடி $P\hat{Q}R$, $P\hat{S}R$ ஆகும்.

நாற்பக்கல் ஒன்றின் இரண்டு சோடி எதிர்ப் பக்கங்களும் சமாந்தரமாயின் அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.



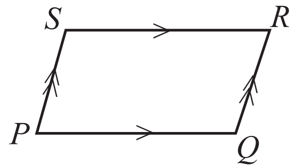
மேலேயுள்ள இணைகரத்தில் AB,DC ஆகிய பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை என்பதைக் காட்டுவதற்கு ஒரு அம்புக்குறி வீதமும் BC, AD ஆகிய பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை என்பதைக் காட்டுவதற்கு இரண்டு அம்புக்குறிகள் வீதமும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

முதலில் இணைகரங்களின் பண்புகளை அறிந்து கொள்வதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

16.1 இணைகரத்தின் பண்புகள்

செயற்பாடு 1

மூலைமட்டத்தையும் நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி ஓர் இணைகரம் வரைக. அதற்கு உருவிலுள்ளவாறு $PQRS$ எனப் பெயரிடுக.



(1) நீங்கள் வரைந்த இணைகரம் $PQRS$ இல்,

(i) PQ, QR, SR , PS ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்களை அளக்க.

(ii) எதிர்ப் பக்கச் சோடிகளான PQ, SR இன் நீளங்கள் பற்றியும் PS, QR இன் நீளங்கள் பற்றியும் நீர் யாது கூறலாம்?

$PQ = SR$ எனவும் $PS = QR$ எனவும் தெளிவாகின்றது.

(2) மேலே நீங்கள் வரைந்த இணைகரத்தில்

$P\hat{Q}R, Q\hat{P}S, P\hat{S}R, Q\hat{R}S$ ஆகிய கோணங்களின் பெறுமானங்களை அளக்க.

எதிர்க் கோணங்களான $Q\hat{P}S$, $Q\hat{R}S$ என்பவற்றின் பருமன் பற்றியும் $R\hat{S}R$, $P\hat{Q}R$ என்பவற்றின் பருமன் பற்றியும் நீர் யாது கூறலாம்?

$Q\hat{P}S = Q\hat{R}S$ எனவும் $P\hat{S}R = P\hat{Q}R$ எனவும் தெளிவாகின்றது.

(3) இணைகரம் $PQRS$ ஐத் திசுத்தாளில் பிரதிசெய்து அதன் இரண்டு பிரதிகளை வரைந்து வெட்டி எடுத்துக் கொள்க. ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் PR ஐ வரைக. இனி மூலைவிட்டம் வழியே வெட்டியெடுத்துப் பெறப்படும் முக்கோணிகள் ஒன்றன்மீது ஒன்று பொருந்துகின்றதா எனப்பார்க்க.

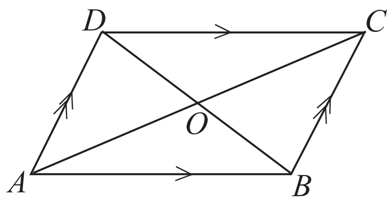
அம்முக்கோணிகள் ஒன்றன்மீது ஒன்று பொருந்துவது தெளிவாகும். அதாவது இரண்டு முக்கோணிகளினதும் பரப்பளவுகளும் சமனாகும். இவ்வாறே மற்றைய மூலைவிட்டம் வழியே வெட்டும்போது பெறப்படும் இரண்டு முக்கோணிகளினதும் பரப்பளவுகள் சமனாவதை அவதானிப்பதற்காக நீங்கள் வெட்டியெடுத்த மற்றைய பிரதிகளைப் பயன்படுத்துக.

மேலேயுள்ள செயற்பாட்டிற்கேற்ப,

ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனானவை என்பதும் எதிர்க் கோணங்கள் சமனானவை என்பதும் இணைகரத்தின் ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தினாலும் இணைகரத்தின் பரப்பளவானது இருசமகூறிடப்படுகின்றது என்பதும் தெளிவாகிறது.

செயற்பாடு 2

செயற்பாடு 1 இல் போன்று மூலைமட்டத்தையும் நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி ஓர் இணைகரம் வரைக. அதனை உருவில் உள்ளவாறு $ABCD$ எனப் பெயரிடுக.



இப்போது AC, BD ஆகிய மூலைவிட்டங்களை வரைக. அவை இடைவெட்டும் புள்ளியை O எனப் பெயரிடுக.

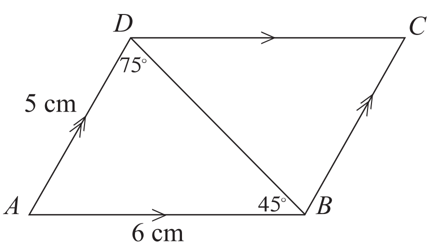
- AO, OC, OB , OD ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளக்க.
- AO , OC நீளங்கள் பற்றி நீங்கள் யாது கூறுவீர்?
- OB , OD ஆகிய நீளங்கள் பற்றி நீங்கள் யாது கூறுவீர்?
- $AO = OC$ என்பதும் $OB = OD$ என்பதும் தெளிவாகிறது.

இதற்கேற்ப, ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடு கின்றன என்பது தெளிவாகிறது.

இனி, ஓர் இணைகரத்தில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து இணைகரத்தின் மற்றைய உறுப்புகளைக் கண்டுகொள்ளும் முறையினை ஆராய்வோம்.

இணைகரம் $ABCD$ இல் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப பின்வரும் பக்கங்களினதும் கோணங்களினதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) BC இன் நீளம்
(ii) DC இன் நீளம்
(iii) $B\hat{A}D$
(iv) $B\hat{C}D$
(v) $A\hat{B}C$
(vi) $A\hat{D}C$



(i) ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனானவை என்பதால்
$AD = BC$ உம் $AB = CD$ உம் ஆகும்.
$\therefore BC = 5$ cm

(ii) $DC = 6$ cm

(iii) ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்

$$B\hat{A}D = 180° - 75° - 45°$$
$$= 60°$$

(iv) ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்க் கோணங்கள் சமனானவை என்பதால்

$B\hat{A}D = B\hat{C}D$

$\therefore B\hat{C}D = 60^\circ$

$A\hat{D}B = C\hat{B}D$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

(v) $\therefore C\hat{B}D = 75^\circ$

$A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D$

$\therefore A\hat{B}C = 45^\circ + 75^\circ$

$= 120^\circ$

(vi) ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமனாவதால்

$A\hat{B}C = A\hat{D}C$

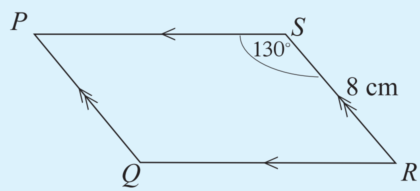
$\therefore A\hat{D}C = 120^\circ$

பயிற்சி 16.1

1. இணைகரம் $PQRS$ இல் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) பக்கம் PQ வின் நீளத்தைக் காண்க.

(ii) $Q\hat{P}S, P\hat{Q}R, Q\hat{R}S$ ஆகிய கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.

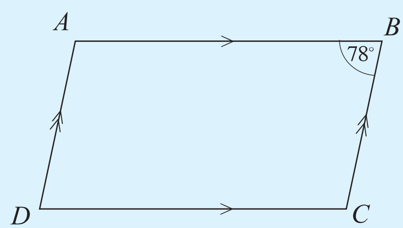


2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

(i) $B\hat{C}D$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு 24 cm^2 ஆயின், முக்கோணி BCD இன் பரப்பளவு யாது ?

(iii) முக்கோணி ACD இன் பரப்பளவு யாது ?



3. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

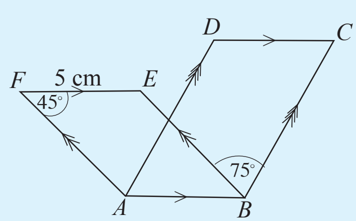
(i) DC இன் நீளத்தைக் காண்க.

(ii) $A\hat{B}E$ இன் பெறுமானம்

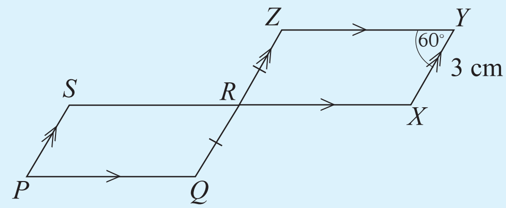
(iii) $A\hat{D}C$ இன் பெறுமானம்

(iv) $B\hat{C}D$ இன் பெறுமானம்

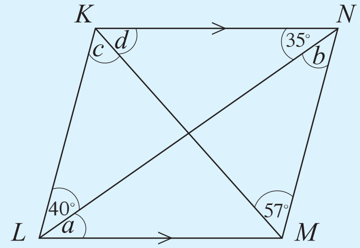
ஆகியவற்றைக் காண்க.



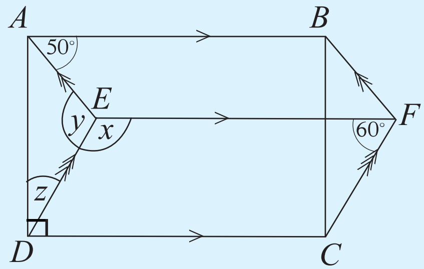
4. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,
(i) PS இன் நீளம்
(ii) $Q\hat{P}S$ இன் பருமன்
(iii) $P\hat{Q}R$ இன் பருமன்
ஆகியவற்றைக் காண்க .



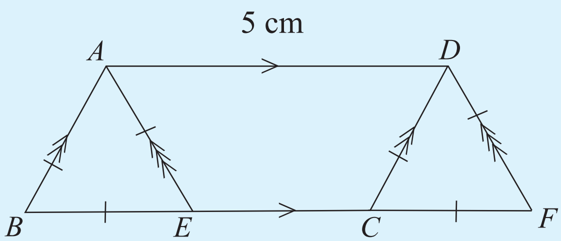
5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப a, b, c, d ஆகியவற்றால் தரப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,
(i) பக்கம் DC இன் நீளத்திற்குச் சமமான இரண்டு பக்கங்களைப் பெயரிடுக.
(ii) x, y, z ஆகியவற்றினால் தரப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



7. உருவில் $ABCD$, $ADFE$ ஆகியன இரண்டு இணைகரங்களாகும் இங்கு தரப்பட்டுள்ள தகவல் களுக்கேற்ப
(i) BC இன் நீளம்.
(ii) $A\hat{D}C$, $E\hat{C}D$, $C\hat{F}D$ ஆகிய கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



16.2 ஓர் இணைகரத்தின் பண்புகள் தொடர்பான தேற்றங்கள்

இணைகரங்களுக்காக நாம் அவதானிக்கும் பண்புகள் எல்லா இணைகரங்களுக்கும் பொதுவானவை என்பதால் அவற்றை பின்வருமாறு ஒரு தேற்றமாக முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம் : (I) ஓர் இணைகரத்தில்,

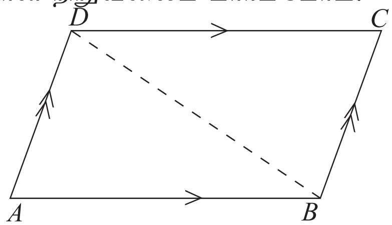
(i) எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனானவை ஆகும்.

(ii) எதிர்க் கோணங்கள் சமனானவை ஆகும்.

(iii) ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமும் இணைகரத்தின் பரப்பளவை இருசமகூறிடும்.

(II) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும்.

இத்தேற்றத்தின் முறையான நிறுவலைப் பார்ப்போம்.



தரவு : $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும்.

நி. வே. : (i) $AB = DC$, $AD = BC$

(ii) $B\hat{A}D = B\hat{C}D$, $A\hat{D}C = A\hat{B}C$

(iii) $\Delta\ ABD$ இன் பரப்பளவு $= \Delta\ BCD$ இன் பரப்பளவு

$\Delta\ ABC$ இன் பரப்பளவு $= \Delta\ ADC$ இன் பரப்பளவு

அமைப்பு : மூலைவிட்டம் BD ஐ இணைப்போம்.

ABD , BCD ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளையும் ஒருங்கிசையச் செய்வதன் மூலம் தேவையான மூன்று விடைகளையும் பெற்றுக் கொள்ளலாம் இரண்டு முக்கோணிகளும் கோ.கோ.ப. நிபந்தனையின் கீழ் ஒருங்கிசைகின்றன என்பதை இவ்வாறு நிறுவோம்

நிறுவல் - ABD , BCD ஆகிய முக்கோணிகளில்

$A\hat{D}B = C\hat{B}D$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $AD//BC$)

$A\hat{B}D = B\hat{D}C$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $AD//BC$)

BD பொதுப் பக்கம்

$\therefore \Delta\ ABD \equiv \Delta\ BCD$ (கோ.கோ.ப.)

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமன் என்பதால்

(i) $AB = DC$, $AD = BC$ ஆகும்

(ii) $B\hat{A}D = B\hat{C}D$ ஆகும்.

மேலும் $B\hat{D}A = D\hat{B}C$ யும்

$B\hat{D}C = D\hat{B}A$ யும் ஆகும்.

$$\underbrace{B\hat{D}A + B\hat{D}C}_{A\hat{D}C} = \underbrace{D\hat{B}C + D\hat{B}A}_{A\hat{B}C}$$

$A\hat{D}C = A\hat{B}C$ ஆகும்.

(iii) $\Delta\, ABD = \Delta\, BCD$ (ஒருங்கிசைவான Δ கள் பரப்பளவில் சமமானவை)

இவ்வாறே AC ஐ இணைப்பதன் மூலம்

$\Delta\, ACD \equiv \Delta\, ABC$ எனக் காட்டுவதன் மூலம்

$\Delta\, ABC$ இன் பரப்பளவு $= \Delta\, ACD$ இன் பரப்பளவு

மூலைவிட்டம் AC ஐ வரைவதன் மூலமும் மேலேயுள்ளவற்றை நிறுவலாம்.

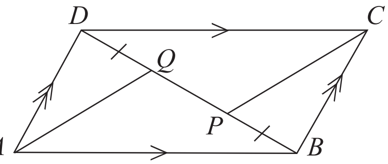
உதாரணம் 1

இணைகரம் $ABCD$ இல் மூலைவிட்டம் BD இன் மீது $BP = DQ$ ஆகுமாறு P, Q என்பன குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $\Delta\, ADQ \equiv \Delta\, BPC$ எனவும்

(ii) $AQ \,/\!/\, PC$ எனவும்

நிறுவுக.



நிறுவல் (i) ADQ, BPC ஆகிய முக்கோணிகளில்

$DQ = BP$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AD = BC$ (இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமன் என்பதால்)

$A\hat{D}Q = P\hat{B}C$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$\therefore \Delta\, A\hat{D}Q \equiv \Delta\, B\hat{P}C$ (ப.கோ.ப.)

(ii) ADQ, BPC ஆகிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவதால் ஒத்த உறுப்புகளும் சமமாகும்.

$A\hat{Q}D = B\hat{P}C$

$\therefore A\hat{Q}P = Q\hat{P}C \quad \left(A\hat{Q}D + A\hat{Q}P = B\hat{P}C + C\hat{P}Q = 180^0\right)$

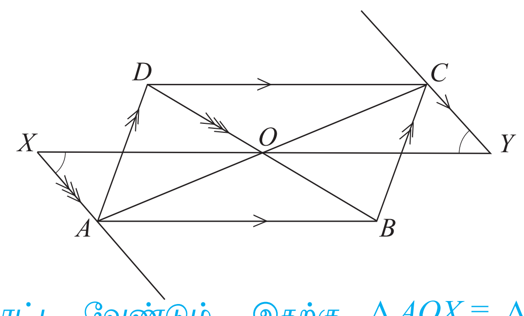
ஆனால் $A\hat{Q}P, Q\hat{P}C$ ஆகியன ஒன்றுவிட்ட கோணங்களாகும்.

ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமனாவதால்

$AQ \,/\!/\, PC$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

கீழே தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப XY இன் நடுப்புள்ளி O எனக் காட்டுக.



$XO = YO$ எனக் காட்ட வேண்டும். இதற்கு $\Delta\, AOX \equiv \Delta\, COY$ எனக் காட்ட வேண்டும்.

நிறுவல் :

$\Delta AOX, \Delta COY$ என்பவற்றில்

$A\hat{X}O = C\hat{Y}O$ ($AX//CY$, ஒன்றுவிட்டக் கோணங்கள்)

$A\hat{O}X = C\hat{O}Y$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$AO = OC$ (இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும்)

$\Delta AOX \equiv \Delta COY$ (கோ.கோ.ப.)

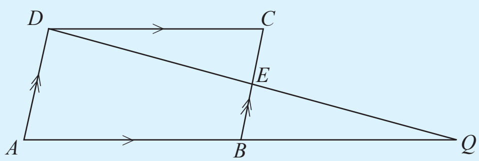
ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் என்பதால்

$\therefore OX = OY$

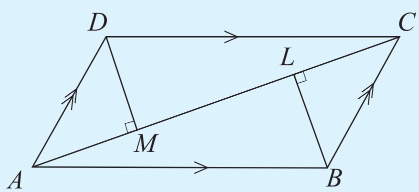
$\therefore$ O ஆனது XY இன் நடுப்புள்ளி ஆகும்.

பயிற்சி 16.2

1. இணைகரம் $ABCD$ இல் பக்கம் BC இன் நடுப்புள்ளி E ஆகும். நீட்டப்பட்ட DE உம் AB உம் ஒன்றையொன்று Q வில் சந்திக்கின்றன. $AB = BQ$ என நிறுவுக.

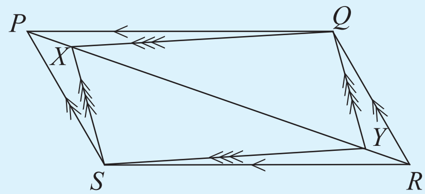


2. இணைகரம் $ABCD$ இல் B, D ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து AC இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் BL, DM ஆகும். $BL = DM$ எனக் காட்டுக.



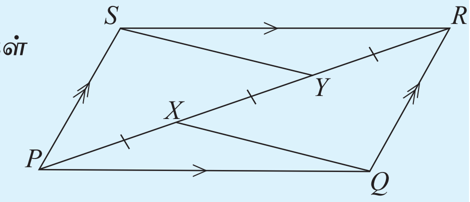
3. உருவில் $PQRS$, $QYSX$ ஆகிய இரண்டு இணைகரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) $PX = RY$ என நிறுவுக.

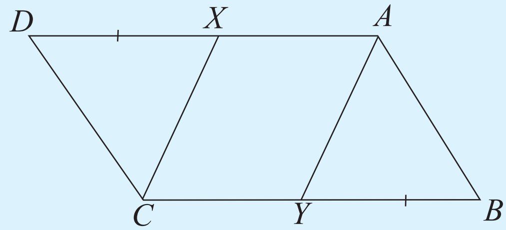


(ii) நாற்பக்கல் $PSXQ$ இன் பரப்பளவு = நாற்பக்கல் $SRQY$ இன் பரப்பளவு எனக் காட்டுக.

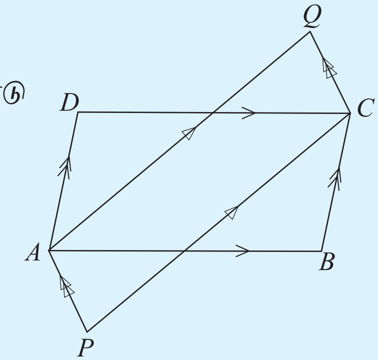
4. $PQRS$ ஓர் இணைகரமாகும்.
ஆகுமாறு PR மீது X, Y ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.
(i) $QX = SY$ எனவும்.
(ii) $QX \parallel SY$ எனவும் நிறுவுக.



5. உருவிலுள்ள $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும். AD, BC ஆகிய பக்கங்களின்மீது $DX = BY$ ஆகுமாறு X, Y ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.
(i) $\Delta ABY \equiv \Delta DCX$ என நிறுவுக.
(ii) $AY \parallel XC$ என காட்டுக.



6. உருவில் $ABCD$, $APCQ$ ஆகிய இரண்டு இணைகரங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன.
AC, BD, PQ ஆகியன ஒரே புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றனவென நிறுவுக.



7. இணைகரம் $PQRS$ இல் $P\hat{S}R, Q\hat{R}S$ ஆகிய கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் PQ இன் மீதுள்ள புள்ளி X இல் இடைவெட்டுகின்றன.
(i) இத் தகவல்களை உள்ளடக்கிய உருவப்படமொன்று வரைக.
(ii) $PX = PS$ என நிறுவுக.
(iii) X ஆனது PQ இன் நடுப்புள்ளி என நிறுவுக.
(iv) $PQ = 2PS$ என நிறுவுக.

17 இணைகரங்கள் II

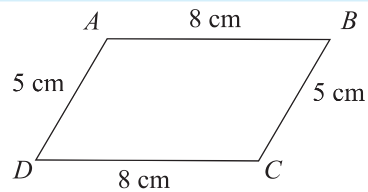
இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,

- ஒரு நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாவதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளை அறிந்து கொள்வதற்குத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமாகவுள்ள ஒரு நாற்பக்கல் இணைகரம் ஆகும். இணைகரங்களின் பண்புகள் பற்றிக் கடந்த பாடத்தில் கற்றோம்.

தேற்றம் : ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமமெனின், அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.

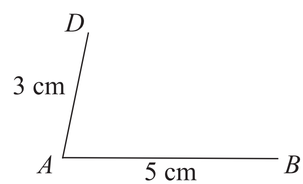


தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AB = DC$, $AD = BC$. ஆகவே $ABCD$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

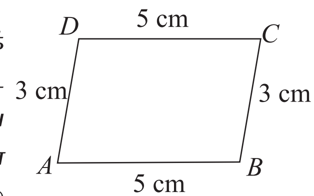
மேற்குறித்த தேற்றம் உண்மை என்பதை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 1

- புயங்களின் நீளங்கள் 5 cm, 3 cm ஆகவும் இருக்கும்போது உருவில் உள்ளவாறு $D\hat{A}B$ யை வரைக.
- B யிலிருந்து 3 cm தூரத்திலும் D யிலிருந்து 5 cm தூரத்திலும் உள்ள புள்ளி C யைப் பெறுக. இப்போது நாற்பக்கல் $ABCD$ யைப் பூரணப்படுத்துக.



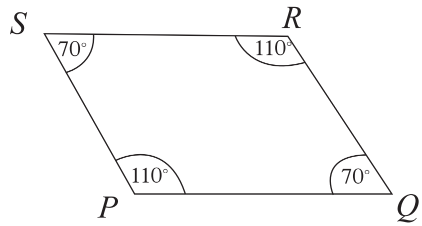
- அப்போது $AB = DC$, $AD = BC$ எனத் தெரிகின்றது.
- மூலைமட்டத்தையும் வரைகோலையும் பயன்படுத்தி அல்லது கோணங்களை அளப்பதன் மூலம் நேயக் கோணச் சோடி ஒன்றின் கூட்டுத்தொகை 180° எனக் காட்டுவதன்வதன்மூலமும் நாற்பக்கல் $ABCD$ யின் எதிர்ப் பக்கங்களுக்கிடையே சமாந்தரவியல்பு உள்ளதாவென ஆராய்க. அதிலிருந்து $AB//DC$ எனவும் $AD//BC$ எனவும் பெறுக.



- இதற்கேற்ப எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனாக உள்ள நாற்பக்கலின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமாந்தரமும் ஆகும். ஆகவே அவ்வாறான நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.

தேற்றம் : ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமெனின், அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

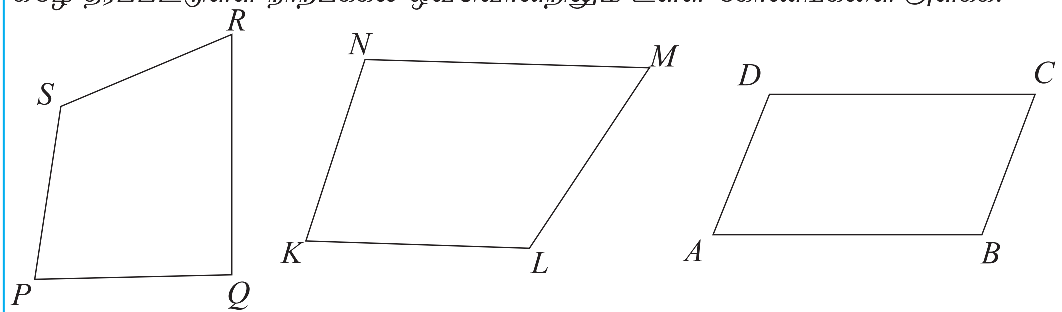
உதாரணமாக தரப்பட்டுள்ள உருவில் $P\hat{Q}R = P\hat{S}R$, $Q\hat{R}S = Q\hat{P}S$ ஆகையால், $PQRS$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.



மேற்குறித்தத் தேற்றம் உண்மையானது என்பதை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 2

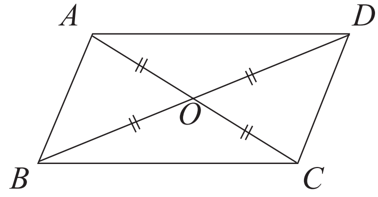
கீழே தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள கோணங்களை அளக்க.



- ஒவ்வொரு நாற்பக்கலினதும் எதிர்க் கோணச் சோடிகள் சமமாவெனப் பார்க்க.
- எதிர்க் கோணங்கள் சமமாக இருக்கும் நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமாந்தரமாவெனப் பார்க்க (நேயக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆக இருக்கின்றதாவெனப் பார்க்க).
- இதற்கேற்ப எதிர்க் கோணங்கள் சமமாக இருக்கும் நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமாக இருக்கும். எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமாகவுள்ள நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

தேற்றம் : ஒரு நாற்பக்கலின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுமெனின், அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

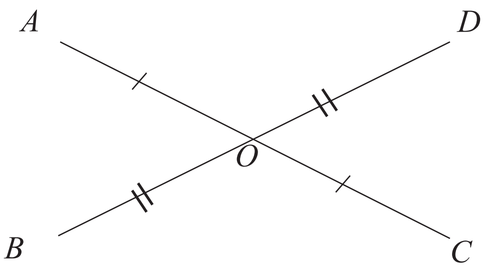
ஓர் உதாரணமாக நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் $AO = OC$, $BO = OD$ ஆகையால் $ABCD$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

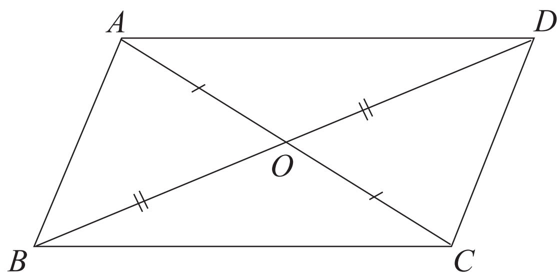


மேற்குறித்த தேற்றம் உண்மையானதா என்பதை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 3

- AC யும் BD யும் மூலைவிட்டங்களாக இருக்கும் நாற்பக்கல் $ABCD$ யை வரைவதற்கு முதலில் மூலைவிட்டம் AC யை வரைந்து அதன் நடுப்புள்ளியை O எனக் குறிக்க.
- இப்போது மூலைவிட்டம் AC யை O இடைவெட்டுமாறு வேறோரு நேர் கோட்டுத் துண்டத்தை வரைக. $OB = OD$ ஆக இருக்குமாறு அக்கோட்டுத் துண்டத்தின் மீது B, D ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்க.

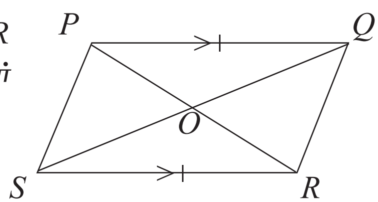




- இப்போது மேற்குறித்த நாற்பக்கல் $ABCD$ ஐப் பூரணப்படுத்துக.
- மூலைமட்டத்தையும் வரைகோலையும் பயன்படுத்தி அல்லது ஒன்றுவிட்டக் கோணங்களை அளந்து பார்ப்பதன் மூலம் நாற்பக்கல் $ABCD$ யின் AB, CD ஆகிய கோடுகளின் சமாந்தரத்தையும் BC, AD ஆகிய கோடுகளின் சமாந்தரத்தையும் பற்றி ஆராய்க.
- இதற்கேற்ப மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும் ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமெனத் தெரிகின்றது. ஆகவே அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.

தேற்றம்: ஒரு நாற்பக்கலின் ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனும் சமாந்தரமாகவும் இருப்பின், அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.

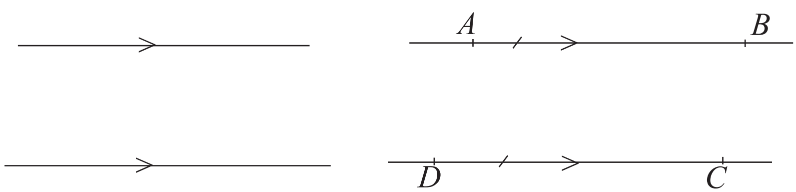
ஓர் உதாரணமாக நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = SR$ ஆகவும் $PQ//SR$ ஆகவும் இருப்பதனால் $PQRS$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.



மேற்குறித்த தேற்றம் உண்மையானது என்பதை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

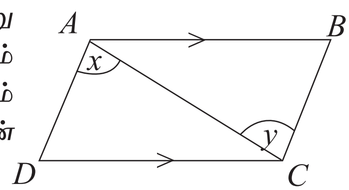
செயற்பாடு 4

- மூலைமட்டத்தையும் வரைகோலையும் பயன்படுத்தி அல்லது வேறொரு முறை யினால் ஒரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடியை வரைக.
- அச்சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடியில் ஒரு கோட்டின் மீது A, B என இரு புள்ளிகளைக் குறிக்க.
- நீளம் AB யிற்குச் சமமான ஒரு நீளத்தை மற்றைய கோட்டின்மீது குறித்து அதற்கு DC எனப் பெயரிடுக.



- இப்போது நாற்பக்கல் $ABCD$ யைப் பூரணப்படுத்தி உருவில் உள்ளவாறு மூலைவிட்டம் AC யை வரைக.

பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி x, y ஆகிய ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியை அளந்து பார்ப்பதன் மூலம் அல்லது மூலைமட்டத்தையும் வரைகோலையும் பயன்படுத்துவதன் மூலம் AD, BC பக்கங்களின் சமாந்தரம் பற்றி விளங்கிக் கொள்க.



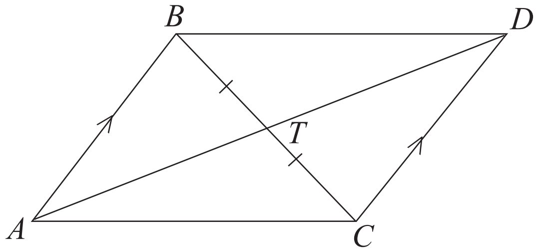
- இதற்கேற்ப, ஓர் எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமமும் சமாந்தரமுமாக இருக்கும் ஒரு நாற்பக்கலின் மற்றைய சோடி எதிர்ப் பக்கமும் சமாந்தரமாகும் ஆகவே அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவும் முறை பற்றிக் கீழேயுள்ள உதாரணத்தின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி T ஆகும். AB இற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரையப்பட்ட கோடு நீட்டப்பட்ட AT யை D யிற் சந்திக்கின்றது. $ABDC$ ஓர் இணைகரமென நிறுவுக.

முதலில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப உருவை வரைவோம்.



எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமமும் சமாந்தரமுமாக இருக்கும் நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் என்பதை நாம் அறிவோம். ஆகவே, ஒரு பக்கச் சோடி சமமும் சமாந்தரமுமெனக் காட்டுவோம். $AB // CD$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $AB = CD$ எனக் காட்டுவோம்.

அதற்காக $\Delta\ ABT$ யும் $\Delta\ CTD$ யும் ஒருங்கிசைகின்றனவெனக் காட்டுவோம்.

ΔABT, ΔCTD ஆகியவற்றில்

$BT = TC$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{T}B = C\hat{T}D$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$A\hat{B}T = T\hat{C}D$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$\Delta\ ABT \equiv \Delta\ CTD$ (கோ.கோ.ப)

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புக்கள் சமமாகையால்

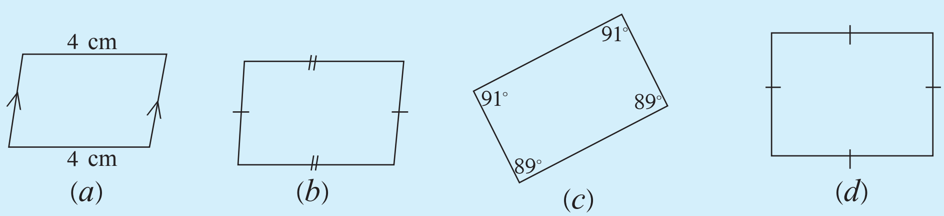
$AB = CD$

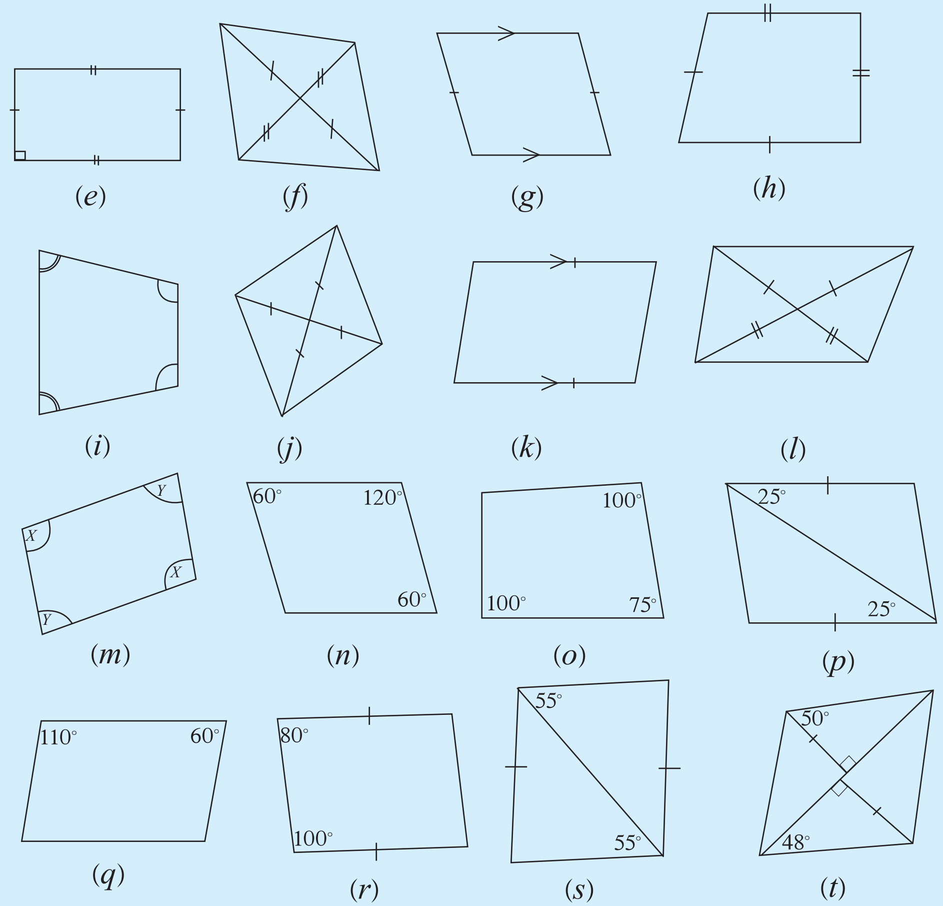
அத்துடன் $AB // CD$

நாற்பக்கல் $ABDC$ ஓர் இணைகரமாகும்.

பயிற்சி 17.1

1. பின்வரும் நாற்பக்கல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களை மாத்திரம் கொண்டு இணைகரமென முடிவுசெய்யத்தக்க நாற்பக்கல்களைத் தெரிந்தெடுக்க.

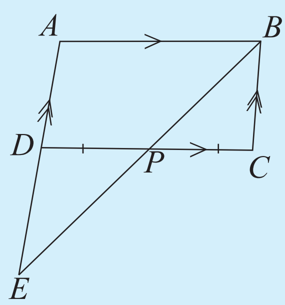




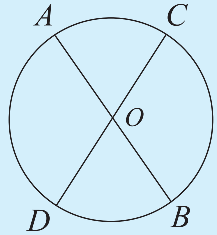
2. ஓர் இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் DC யின் நடுப் புள்ளி P ஆகும். நீட்டப்பட்ட AD யும் நீட்டப்பட்ட BP யும் E யிற் சந்திக்கின்றன.

(i) $\Delta BCP \equiv \Delta DPE$ எனவும்

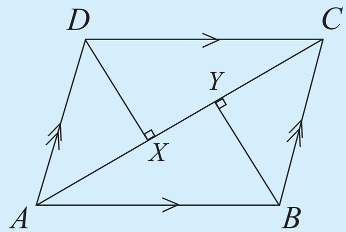
(ii) நாற்பக்கல் $BCED$ ஓர் இணைகரம் எனவும் நிறுவுக.



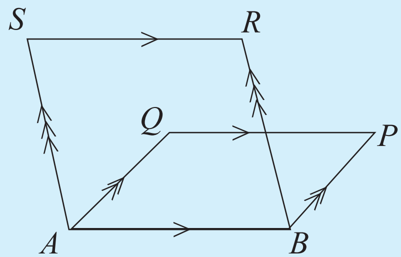
3. *AB,CD* என்பன *O* வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் இரு விட்டங் களாகும். *A, B, C, D* ஆகிய புள்ளி கள் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளென நிறுவுக.



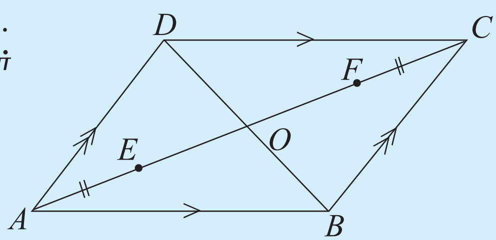
4. இணைகரம் *ABCD* யில் *D, B* ஆகிய உச்சிகளில் இருந்து மூலைவிட்டம் *AC* யிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் *X,Y* ஆகும்.
(i) $\Delta AXD \equiv \Delta BYC$ எனவும்
(ii) $DX = BY$ எனவும்
(iii) *BYDX* ஓர் இணைகரம் எனவும் நிறுவுக.



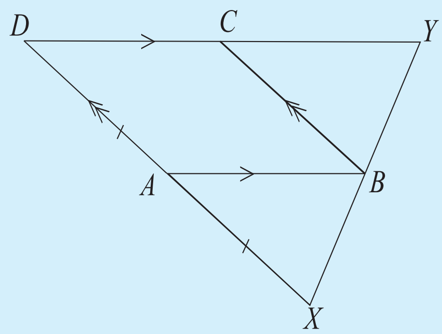
5. *ABPQ, ABRS* என்னும் இரு இணை கரங்கள் உருவிற் காணப்படுன்றன. *QPRS* ஓர் இணைகரமென நிறுவுக.



6. உருவில் *ABCD* ஓர் இணைகரமாகும். $AE = FC$ எனின், *EBFD* ஓர் இணைகரமென நிறுவுக.



7. உருவில் இணைகரம் $ABCD$ இல் $DA = AX$ ஆகுமாறு கோடு DA ஆனது X இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. நீட்டப்பட்ட DC ஆனது XB யை Y இல் சந்திக்கின்றது.

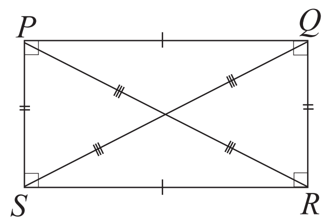


(i) $AXBC$ ஓர் இணைகரமெனவும்
(ii) $ABYC$ ஓர் இணைகரமெனவும்
(iii) $DC=CY$ எனவும்
நிறுவுக.

8. இணைகரம் $PQRS$ இன் மூலைவிட்டங்கள் O இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. PR மீது M, T என்னும் புள்ளிகளும் QS மீது L, N என்னும் புள்ளிகளும், $PM = RT$, $SN = QL$ ஆக இருக்குமாறு உள்ளன.
(i) $MO = OT$
(ii) $LMNT$ ஓர் இணைகரம் எனவும்
(iii) $MSTQ$ ஓர் இணைகரம் எனவும் நிறுவுக.

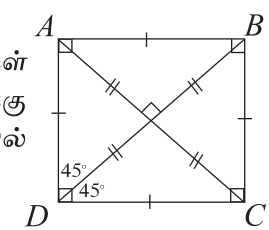
சிறப்பியல்புகள் உள்ள இணைகரங்கள்

1. **செவ்வகம்**



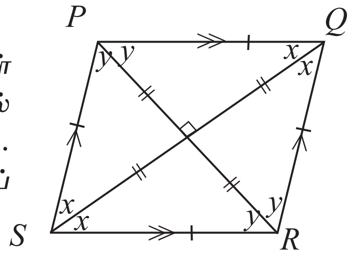
ஓர் இணைகரத்தின் ஒரு கோணம் செங்கோணமாக இருக்கும்போது எஞ்சிய கோணங்களும் செங்கோணங் களாகும். அத்தகைய ஓர் இணைகரம் செவ்வகமாகும். இணைகரத்தின் இயல்புகளுக்கு மேலதிகமாக செவ் வகத்திற்குப் பின்வரும் இயல்புகள் உண்டு.
(i) உச்சிக் கோணங்கள் எல்லாம் செங்கோணங்களாகும்.
(ii) மூலைவிட்டங்கள் நீளத்திற் சமன்

2. **சதுரம்**



இரு அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக இருக்கும் செவ்வகங்கள் சதுரங்களாகும். ஓர் இணைகரத்தின் இயல்புகளுக்கு மேலதிகமாகப் பின்வரும் இயல்புகள் ஒரு சதுரத்தில் காணப்படுகின்றன.
(i) எல்லாப் பக்கங்களும் நீளத்திற் சமம்
(ii) எல்லா உச்சிக் கோணங்களும் செங்கோணங்களாகும்.
(iii) மூலைவிட்டங்கள் நீளத்திற் சமம்.
(iv) மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணத்தில் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுன்றன.
(v) உச்சியில் உள்ள கோணம் மூலைவிட்டத்தினால் இருசமகூறிடப்படுகின்றது.

3. ***சாய்சதுரம்***



ஓர் இணைகரத்தின் இரு அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக இருக்கும்போது நான்கு பக்கங்களும் நீளத்தில் சமமாகும். அத்தகைய இணைகரம் சாய்சதுரமாகும். ஓர் இணைகரத்தின் இயல்புகளுக்கு மேலதிகமாகப் பின்வரும் இயல்புகள் ஒரு சாய்சதுரத்திற்கு உள்ளன.

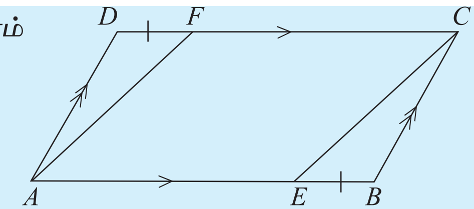
(i) எல்லாப் பக்கங்களும் சமம்.

(ii) மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணத்தில் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுன்றன

(iii) உச்சிக் கோணங்கள் மூலைவிட்டங்களினால் இருசமகூறிடப்படுகின்றன.

பலவினப் பயிற்சி

1. உருவில் தரப்பட்டுள்ள இணைகரம் $ABCD$ இல் $DF = EB$ எனின் $AECF$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.



2. முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C$ இன் இருசமகூறாக்கியானது பக்கம் AC ஐ P இல் இடைவெட்டுகின்றது. BC இற்குச் சமாந்தரமாக A இனூடாக வரைந்த கோட்டை நீட்டப்பட்ட BP ஆனது D இல் சந்திக்கின்றது. $BP = PD$ எனின்

(i) $\Delta\, BCP \equiv \Delta\, ADP$ எனவும்

(ii) $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம் எனவும் நிறுவுக.

(iii) $AC = 18$ cm, $BD = 24$ cm ஆயின் AB இன் நீளத்தைக் காண்க.

3. ஒரு முக்கோணி ABC யில் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $X\ Y$ ஆகும். C யினூடாக AB யிற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்ட கோடும் XY யும் Z இற் சந்திக்கின்றன.

(i) $\Delta AXY \equiv \Delta CYZ$ எனவும்

(ii) $BCZX$ ஓர் இணைகரம் எனவும் நிறுவுக.

4. இணைகரம் $ABCD$ யில் AB, BC, CD, AD ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, Q, R , S ஆகும்.

(i) $\Delta ASP \equiv \Delta CQR$ எனவும்

(ii) $PQRS$ ஓர் இணைகரம் எனவும் நிறுவுக.

18 தொடைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஒரு தொடையைப் விபரிக்கக்கூடிய முறைகளை அறிவதற்கும்
- இரண்டு தொடைகள் தொடர்பான பிரதேசங்களை இனங்காண்பதற்கும் அத் தொடைப்பிரிவுகளிலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கைகளைப் பயன் படுத்தி பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

தொடைக் குறிப்பீடு

ஒரு தொடையை வகைகுறிக்கக்கூடிய மூன்று முறைகளை நீங்கள் முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். அவையாவன,

- சொற்களில் விபரித்தல்
- மூலகங்களைப் பட்டியற்படுத்தல்
- வென் வரிப்படமாகக் காட்டுதல்

என்பனவாகும்.

A என்பது 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள 3 இன் மடங்குகளின் தொடையாயின் அதனை மேற்குறித்த மூன்று முறைகளிலும் காட்டுவோம்.

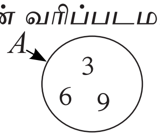
- சொற்களில் விபரித்தல்

  $A = \{$1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள மூன்றின் மடங்குகள்$\}$

  அல்லது

  $A =$ 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள மூன்றின் மடங்குகள்
- மூலகங்களைப் பட்டியற்படுத்தல்

  $A = \{3, 6, 9\}$
- வென் வரிப்படமாகக் காட்டுதல்



18.1 ஒரு தொடையின் பிறப்பாக்கி வடிவம்

இது ஒரு தொடையைக் காட்டக்கூடிய மேலுமொரு வகைகுறிப்பீட்டு முறையாகும். உதாரணமாக 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள 10 இன் மடங்குகளின் தொடையை பிறப்பாக்கி வடிவத்தில் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

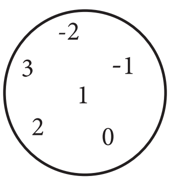
A = { x : x என்பது 3 இன் மடங்குகள், $1 < x < 10$ }

இங்கு x என்பது ஒரு மாறியாகும். இதற்கு எந்தவொரு குறியீட்டையும் பயன்படுத்தலாம். முக்காற் புள்ளி குறியீட்டின் பின்னுள்ளவற்றினால் மாறி x ஆனது எவ்வாறிருக்க வேண்டும் என்பது விபரிக்கப்படுகின்றது. பிறப்பாக்கி வடிவில் உள்ள தொடையை மற்றைய வடிவங்களிலும் விவரிக்கலாம். ஒரு தொடையை வெவ்வேறு பிறப்பாக்கி வடிவங்களிலும் எழுதலாம். உதாரணமாக { 1, 2 }என்னும் தொடையை பிறப்பாக்கி வடிவத்தில் எழுதக்கூடிய வித்தியாசமான மூன்று முறைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$$A = \{ x : (x-1)(x-2) = 0 \}$$
$$A = \{ y : y \in \mathbb{Z} \ , 1 \leq y \leq 2 \}$$
$$A = \{ n \in \mathbb{Z} \ : \ 0 < n \leq 2 \}$$

ஒரு தொடையின் பிறப்பாக்கி வடிவம் பற்றிய பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனத்தில் கொள்க.

உதாரணம் 1

தொடை	பிறப்பாக்கி வடிவம்
A = {10 இலும் குறைந்த நேர் நிறைவெண்கள்}	$A = \{x: x \in \mathbb{Z}^+ , 0 < x < 10\}$ அல்லது $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 0 < x < 10\}$
$B = \{16, 25, 36, 49\}$	B = { x : x நிறைவர்க்கமாகும். $16 \leq x \leq 49$}
C 	$C = \{ x : x \in \mathbb{Z} \ -2 \leq x \leq 3 \}$ அல்லது $C = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 3 \}$

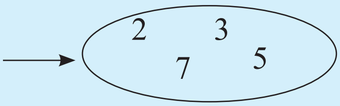
பயிற்சி 18.1

1. 10 இலிருந்து 15 வரையுள்ள நேர் முழு எண் தொடையை

(i) சொற்களில் விபரித்தலாக
(ii) மூலகங்களின் பட்டியற்படுத்தலாக
(iii) வென் வரிப்படமாக
(iv) தொடைப் பிறப்பாக்கி வடிவமாக
எழுதுக.

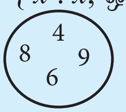
2. கீழே தரப்பட்ட ஒவ்வொரு தொடையையும் சொற்களில் விபரித்து எழுதுக.

(i) $A = \{3, 6, 9, 12, ...\}$

(ii) B 

(iii) $C = \{ x : x,$ நிறைவர்க்கமாகும். $10 < x < 100 \}$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங்களின் பட்டியற்படுத்தலாக எழுதுக

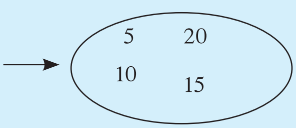
(i) $X = \{$ ANURADHAPURA என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்கள்$\}$
(ii) $A = \{ x : x,$ ஒரு முதன்மை எண்ணாகும் $10 < x < 20\}$
(iii) $B =$ 

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையையும் வென் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக.

(i) $A = \{ 7, 14, 21, 28 \}$
(ii) $B = \{$ ஆங்கில அரிச்சுவடியில் உள்ள உயிரெழுத்துக்கள்$\}$
(iii) $Y = \{x \in \mathbb{Z} \ : x^2 = 4\}$

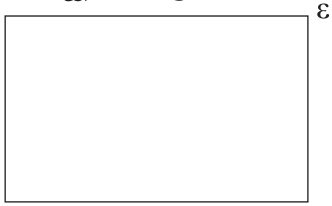
5. கீழே தரப்பட்ட ஒவ்வொரு தொடைகளையும் தொடையின் பிறப்பாக்கி வடிவில் எழுதுக.

(i) $X = \{1$ இற்கும் 10 இற்கும் இடைப்பட்ட ஒற்றை எண்கள் $\}$
(ii) $Y = \{0, 1, 2, 3\}$

(iii) Z 

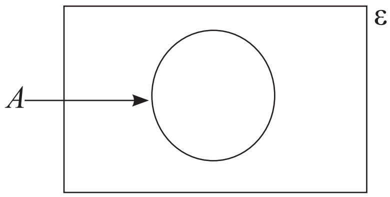
18.2 வென் வரிப்படத்தில் பிரதேசங்களை இனங்காணல்

வென் வரிப்படங்களை வரையும்போது அகிலத் தொடையானது ஒரு செவ்வகத்தினால் காட்டப்படுவதுடன் அது ε இனால் குறிப்பீடு செய்யப்படும்.

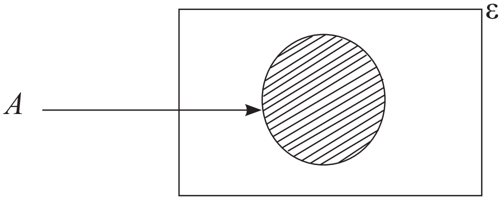


இவ்வகிலத் தொடையின் தொடைப்பிரிவானது வட்ட வடிவ அல்லது நீள்வளைய பிரதேசங்களின்மூலம் காட்டப்படும். இத்தொடைப்பிரிவுகளின் மூலம் அகிலத் தொடையின் வெவ்வேறு பிரதேசங்களை இனங்காண்பது பற்றிக் கவனத்தில் கொள்வோம்.

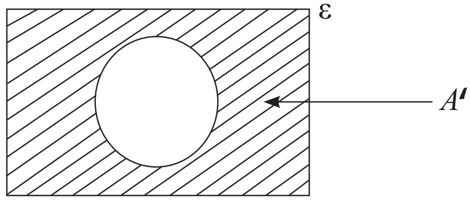
1. அகிலத் தொடையில் ஒரு தொடைப்பிரிவை மாத்திரம் காட்டும்போது



தொடைப்பிரிவு A இன் மூலம் அகிலத் தொடையானது இரண்டு பிரதேசங்களாக வேறுபடுத்தப்படுகின்றது. அவையாவன A இன் பிரதேசம், A இன் நிரப்பியாகிய A' இன் பிரதேசம் இவ்விரண்டு பிரதேசங்களும் கீழேயுள்ள வென் வரிப்படங்களில் நிழற்றிக் காட்டப்பட்டுள்ளன.



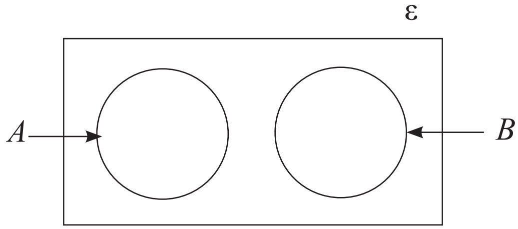
A



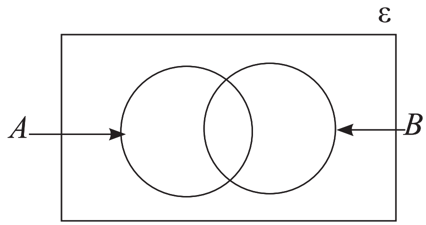
A இன் நிரப்பி $= A'$

2. அகிலத் தொடையில் இரண்டு தொடைப்பிரிவுகள் காட்டும்போது

தொடைப்பிரிவுகளை A , B எனக் கொள்வோம். A , B ஆகியவற்றிற்குப் பொது மூலகங்கள் இல்லாதபோது, (அதாவது $A \cap B = \emptyset$ ஆகும்போது), A , B ஆகியவற்றிக்கு பொது மூலங்கள் உள்ளபோது, அதாவது $A \cap B \neq \emptyset$ ஆகும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ளவை போன்ற வென் வரிப்படங்கள் கிடைக்கும்.



$A \cap B = \emptyset$ ஆகும்போது



$A \cap B \neq \emptyset$ ஆகும்போது

பிரதேசங்களை அறிந்துகொள்ள முன்னர் கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடை வரைவிலக்கணங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.

$A' = A$ ஐச் சாராத மூலகங்களைக் கொண்ட தொடை

$A \cap B = A$, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளுக்கும் உரிய பொது மூலகங்களைக் கொண்ட தொடை

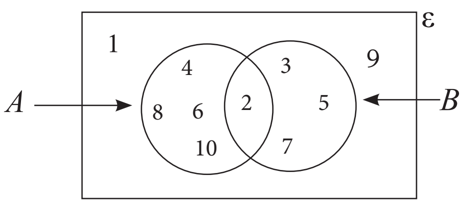
$A \cup B = A$ இற்கு அல்லது B இற்கு (அல்லது A, B ஆகிய இரண்டு தொடை களுக்கும்) உரிய மூலகங்களைக் கொண்ட தொடை

உதாரணமாக $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ எனவும்

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ எனவும்

$B = \{2, 3, 5, 7\}$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது ஒரு வென் வரிப்படத்தில் இத்தொடைகளை இவ்வாறு காட்டலாம்.



தரப்பட்டுள்ள தகவல்களின் படி

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ எனவும்

$A \cap B = \{2\}$ எனவும்

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ எனவும்

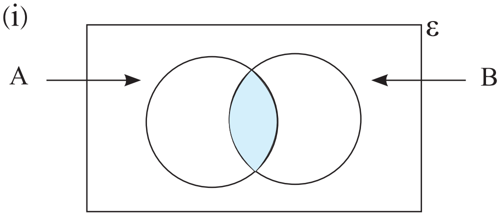
மேலும் $(A \cup B)' = \{1, 9\}$ எனவும்

$(A \cap B)' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ எனவும்

வென் வரிப்படத்தை நன்கு அவதானிக்கும்போது தெரிகின்றது.

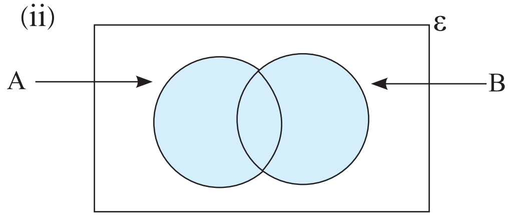
ஓர் அகிலத் தொடையின் இரண்டு தொடைப் பிரிவுகளை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டும்போது இவ்வென் வரிப்படத்தில் பல பிரதேசங்கள் உருவாகும். கீழே ஒவ்வொரு பிரதேசத்தையும் தொடைகளின் நிரப்பி, ஒன்றிப்பு, இடைவெட்டு என்பவற்றைப் பயன்படுத்தி எழுதக்கூடிய முறை காட்டப்பட்டுள்ளது.

(i)



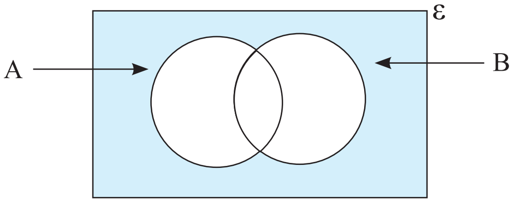
$A \cap B$

(ii)



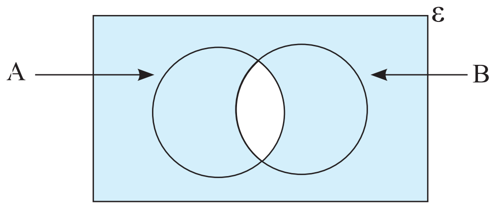
$A \cup B$

(iii)



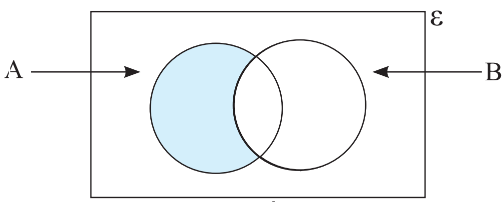
$(A \cup B)'$

(iv)



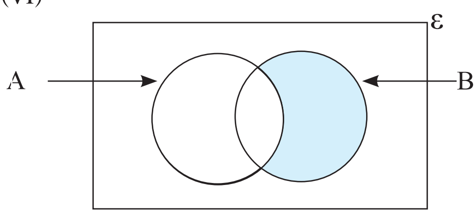
$(A \cap B)'$

(v)



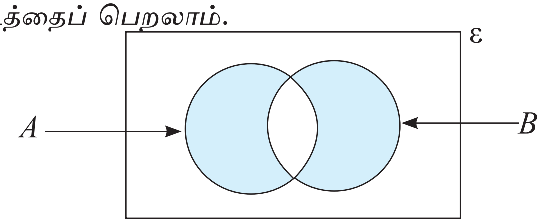
$A \cap B'$

(vi)



$A' \cap B$

மேலே கலந்துரையாடிய உதாரணத்திற்கேற்ப
$A \cap B' = \{4, 6, 8, 10\}$ உம் $A' \cap B = \{3, 5, 7\}$ உம் ஆகும்.
மேலும் (v), (vi) இல் தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படங்களிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தைப் பெறலாம்.

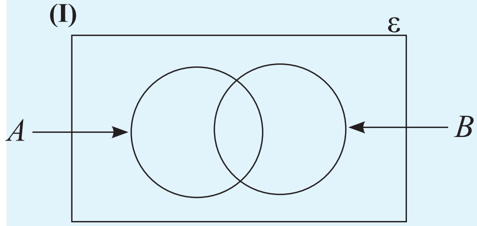


$\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)$

பயிற்சி 18.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தைப் பிரதிசெய்து தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடைக்கும் உரிய பிரதேசத்தை வெவ்வேறாக நிழற்றுக.

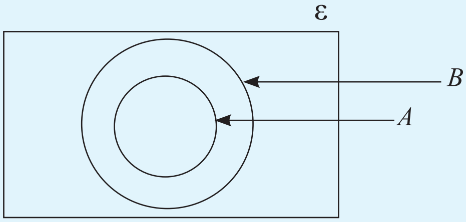
(I)



a. $A' \cap B'$ **b.** $A' \cup B'$
c. $(A \cap B)'$ **d.** $(A \cup B)'$
e. $(A \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'$ **f.** $(A \cap B')'$
g. $(A' \cap B)'$ **h.** $(A \cup B')'$
i. $(A' \cup B)'$

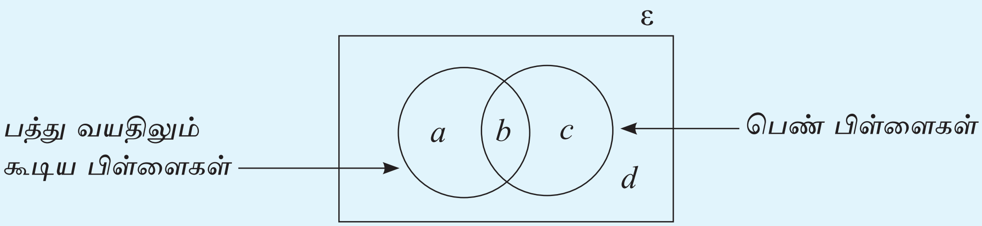
(II) மேலே நீங்கள் நிழற்றியப் பிரதேசங்களை அவதானித்து சமனான சோடித் தொடைகள் யாவற்றையும் எழுதுக.

2. கீழே A, B ஆகிய தொடைகளில் $A \subset B$ ஆகும் சந்தர்ப்பத்திற்குரிய வென் வரிப்படம் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்வென்வெரிப்படத்தை 6 பிரதிகள்செய்து தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடைப் பிரதேசத்தையும் நிழற்றுக.



(i) $A \cap B$ (ii) $A \cup B$
(iii) $A' \cap B$ (iv) $A' \cup B$
(v) $(A \cup B)'$ (vi) $(A' \cup B)'$

3. ஒரு சிறுவர் கழகத்தில் உள்ள பிள்ளைகள் பற்றிய தகவல்கள் கீழேயுள்ள வென் வரிப்படத்தில் தரப்பட்டுள்ளன.

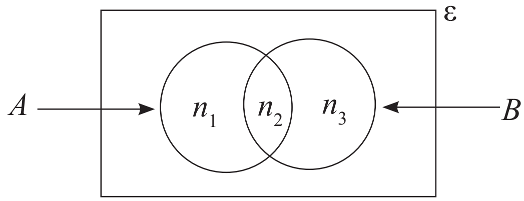


a, b, c, d இனால் காட்டப்படும் ஒவ்வொரு பிரதேசத்தைச் சார்ந்தவர்களையும் விபரிக்க.
(உதாரணமாக a இனால் காட்டப்படுவது, " 10 வயதிலும் கூடிய ஆண்பிள்ளைகள்" ஆகும்.)

4. $\varepsilon = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A' \cap B \;= \{4, 5\}$
$A \cap B \;= \{3\}$
$(A \cup B)' = \{1\}$ ஆயின் பொருத்தமான ஒரு வென் வரிப்படத்தில் மேலேயுள்ள தரவுகளைக் குறிக்க. அதிலிருந்து
A, $A \cup B$, $B' \cap A$ என்னும் தொடைகளைக் காண்க.

18.3 இரண்டு தொடைகளின் மூலகங்களுக்கு இடையிலான தொடர்பு

- கீழே உள்ள உருவில் $A \cap B \neq \emptyset$ ஆகவுள்ள அகிலத் தொடைகளைச் சார்ந்த இரு தொடைப்பிரிவுகள் தரப்பட்டுள்ளன.



இங்கு n_1, n_2, n_3 என்பனமூலம் உரிய பிரதேசங்களைச் சார்ந்த மூலகங்களின் எண்ணிக்கைகள் தரப்பட்டுள்ளன. (வென்வரிப்படத்தில் மூலகங்களை எழுத வேண்டுமாயினும், பிரசினம் விடுவித்தலின் இலகுக்காக இவ்வாறு மூலகங்களின் எண்ணிக்கைகள் எழுதப்படும்.)

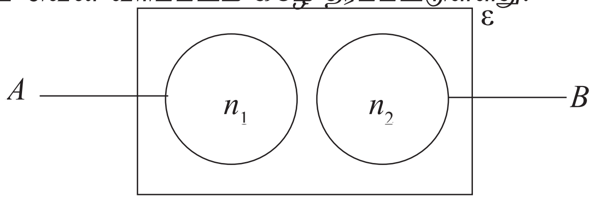
தொடை A இற்குரிய மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை $n(A)$ என்றவாறு காட்டுவோம். உருவிற்கேற்ப ஒவ்வொரு தொடைப் பிரதேசத்துக்குமுரிய மூலகங்களின் எண்ணிக்கை

$$n(A) = n_1 + n_2$$
$$n(B) = n_2 + n_3$$
$$n(A \cap B) = n_2$$
$$n(A \cup B) = n_1 + n_2 + n_3$$
$$n(A \cup B) = \underbrace{n_1 + n_2} + \underbrace{n_2 + n_3} - n_2$$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ என்பது பெறப்படும்.

எனவே, $\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

- A , B ஆகிய இரண்டு தொடைப்பிரிவுகளாகின்ற மூட்டற்றவையான சந்தர்ப் பத்திற்கேற்ப வென் வரிப்படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



இச்சந்தர்ப்பத்தில்

$n(A) = n_1$

$n(B) = n_2$

$n(A \cup B) = n_1 + n_2$

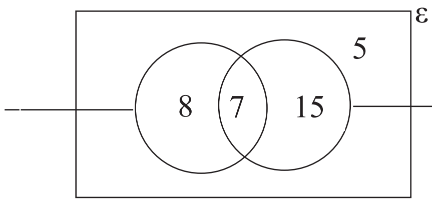
இதற்கேற்ப $A \cap B = \emptyset$ ஆகும்போது

$\therefore$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

இரண்டு தொடைகள் தொடர்பான பிரதேசங்களை மேலும் அறிந்து கொள்வதற்காக கீழேயுள்ள உதாரணங்களை மேலும் நன்கு கற்க. இங்கு, ஒரு தொடையில் அதற்குரிய மூலகங்களை எழுதுவது நியமமாயிருப்பினும்,இலகுவிற்காக தொடையில் மூலகங் களின் எண்ணிக்கை எழுதப்பட்டுள்ளது

உதாரணம் 1

கீழே ஒரு பாடசாலையில் உதைப்பந்தாட்டம், கிறிக்கெற் ஆகிய விளையாட்டுகளில் ஈடுபடும் மாணவர்கள் பற்றிய தகவல்கள் அடங்கிய வென் வரிப்படம் தரப்பட்டுள்ளது.



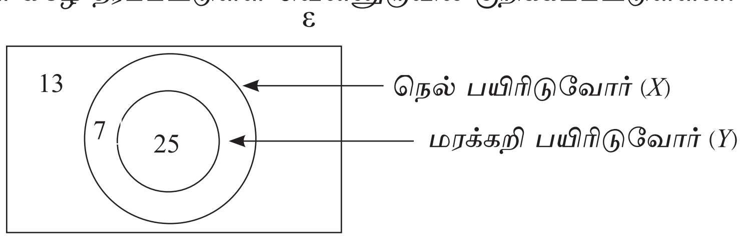
1. உதைப்பந்தாட்டத்தில் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
2. கிறிக்கெற்றில் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
3. இரண்டு விளையாட்டுகளிலும் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
   (உதைப்பந்தாட்டம், கிறிக்கெற் விளையாட்டுகளில் ஈடுபடுவோர்)
4. கிறிக்கெற்றில் மட்டும் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
5. உதைப்பந்தாட்டத்தில் மட்டும் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
6. உதைப்பந்தாட்டம் அல்லது கிறிக்கெற்றில் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
7. உதைப்பந்தாட்டத்தில் ஈடுபடாதோரின் எண்ணிக்கை யாது?
8. கிறிக்கெற்றில் ஈடுபடாதோரின் எண்ணிக்கை யாது?
9. ஒரு விளையாட்டில் மாத்திரம் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
10. மேற்குறித்த எந்த விளையாட்டிலும் ஈடுபடாதோரின் எண்ணிக்கை யாது?

தற்போது இவற்றிற்கான விடைகளைப் பார்ப்போம்

1. $n\,(F) = 8 + 7 = 15$
2. $n\,(C) = 7 + 15 = 22$
3. $n\,(F \cap C) = 7$
4. $n\,(C \cap F') = 15$
5. $n\,(F \cap C') = 8$
6. $n\,(F \cup C) = 8 + 7 + 15 = 30$
7. $n\,(F') = 15 + 5 = 20$
8. $n\,(C') = 8 + 5 = 13$
9. $n\,\{(F \cap C') \cup (F' \cap C)\} = 8 + 15 = 23$
10. $n\,(F \cup C)' = 5$

உதாரணம் 2

குறித்த ஒரு கிராமத்தில் உள்ள விவசாயிகளிடம் அவர்கள் பயிரிடும் பயிர்கள் பற்றிப் பெறப்பட்ட தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ள வென்னுருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



1. மரக்கறி பயிரிடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
2. நெல் பயிரிடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
3. நெல் மட்டும் பயிரிடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
4. மரக்கறி மட்டும் பயிரிடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
5. நெல்லும் மரக்கறியும் பயிரிடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
6. நெல் அல்லது மரக்கறி பயிரிடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
7. மேற்குறித்த இரண்டு பயிர்ச்செய்கையிலும் ஈடுபடாதோரின் எண்ணிக்கை யாது
8. வினவுதலுக்குட்பட்ட விவசாயிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை யாது

தற்போது இவற்றிற்கான விடைகளைப் பார்போம்

1. $n\,(Y) = 25$
2. $n\,(X) = 7 + 25 = 32$
3. $n\,(Y' \cap X) = 7$
4. $n\,(X' \cap Y) = 0$ (எவரும் இல்லை)
5. $n\,(X \cap Y) = 25$
6. $n\,(X \cup Y) = 7 + 25 = 32$
7. $n\,(X \cup Y)' = 13$
8. $n\,(\varepsilon) = 13 + 7 + 25 = 45$

பயிற்சி 18.3

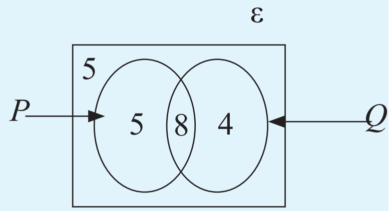
1. $n(A) = 35$, $n(B) = 24$, $n(A \cap B) = 11$ ஆயின், $n(A \cup B)$ ஐக் காண்க

2. $n(X) = 16$, $n(X \cap Y) = 5$, $n(X \cup Y) = 29$ ஆயின், $n(Y)$ ஐக் காண்க.

3. $n(P) = 70$, $n(Q) = 55$, $n(P \cup Q) = 110$ ஆயின், $n(P \cap Q)$ ஐக் காண்க.

4. $n(A) = 19$, $n(B) = 16$, $n(A \cup B) = 35$ ஆயின், $n(A \cap B)$ ஐக் காண்க. இதற்கேற்ப A , B ஆகிய தொடையிலுள்ள சிறப்பியல்பு யாது?

5. வென் வரிப்படத்தில் எண்களால் குறிக்கப்பட்டிருப்பது ஒவ்வொரு பிரதேசத்தையும் சார்ந்த மூலகங்களின் எண்ணிக்கையாகும். $n(P)$, $n(Q)$, $n(P \cap Q)$, $n(P \cup Q)$ ஆகியவற்றைக் கண்டு அதிலிருந்து $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ என்னும் தொடர்பு திருப்தி செய்யப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.



6. ஒரு விளையாட்டுக் குழுவிலுள்ள அங்கத்தவர்களின் எண்ணிக்கை 60 ஆகும். இவர்களில் 30 பேர் கிறிக்கெற் விளையாட்டில் ஈடுபடுவதுடன் 25 பேர் எல்லே விளையாட்டில் ஈடுபடுகின்றனர். இரண்டு விளையாட்டிலும் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை 15 ஆகும்.
   (i) பொருத்தமான வென் வரிப்படத்தில் மேலேயுள்ள தரவுகளைக் குறிக்க.
   (ii) மேறுகுறித்த எந்த விளையாட்டிலும் ஈடுபடாதோரின் எண்ணிக்கை யாது?
   (iii) கிறிக்கெற் விளையாட்டில் ஈடுபடாத ஆனால் எல்லே விளையாட்டில் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை யாது?

7. ஒரு விருந்தில் கலந்துகெண்ட 30 பேரில் 12 பேர் வடையும் 20 பேர் மோதகமும் உண்டனர். 5 பேர் இரண்டு வகைளையும் உண்ணவில்லை. மேற்குறித்த தகவல்களை பொருத்தமான ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறித்து,
   (i) மேற்குறித்த இரண்டு வகைகளையும் உண்டவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
   (ii) மேற்குறித்த இரண்டு வகைகளில் ஏதாவது ஒரு வகையை மட்டும் உண்டவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

8. ஒரு வகுப்பில் உள்ள 40 மாணர்களில் 21 பேர் வானொலி கேட்க விரும்பாதவர்கள், 10 பேர் தொலைக்காட்சி பார்க்க விரும்பாதவர்கள் 8 பேர் மேற்குறித்த இரண்டு வகைகளையும் விரும்பாதவர்கள்
   (i) மேலேயுள்ள தகவல்களைப் பொருத்தமான ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக.
   (ii) மேற்குறித்த இரண்டு வகைகளையும் விரும்புவோரின் எண்ணிக்கை யாது?
   (iii) தொலைக்காட்சியை மட்டும் பார்க்க விரும்புவோரின் எண்ணிக்கை யாது?

9. புது வருட விளையாட்டு போட்டியொன்றில் கலந்துகொண்ட 35 பிள்ளைகளில் 19 பேர் ஆண்பிள்ளைகளாவர். 17 பேர் 15 வயதுக்கு மேற்பட்டவர்கள் 15 வயதுக்கு குறைந்த பெண் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும்.

(i) மேலேயுள்ள தகவல்களை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக.

(ii) 15 வயதிற்கு மேற்பட்ட ஆண் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை யாது?

10. ஒரு சுற்றுலாவில் கலந்து கொண்ட 80 பயணிகளில் 50% பயணிகள் தொப்பி அணிந்திருந்தனராயினும் கைக்கடிகாரம் அணிந்திருக்கவில்லை. அவர்களில் 40% பயணிகள் கைக்கடிகாரம் அணிந்திருந்ததுடன் அவர்களில் 30 பேர் தொப்பி அணிந்திருந்தனர். பொருத்தமான ஒரு வென் வரிப்படத்தில் மேற்குறித்த தகவல்களைக் குறிக்க.

(i) தொப்பியையும் கைக்கடிகாரத்தையும் அணிந்திருந்தவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) மேற்குறித்த ஒன்றையுமே அணிந்திருக்காதவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

11. குறித்த ஒரு கிராமத்தில் வாழும் விவசாயிகளில் 36 பேர் கிழங்கு பயிரிடுகின்றனர். மிளகாயை மட்டும் பயிரிடும் விவசாயிகளின் எண்ணிக்கை 18 ஆகும். கிழங்கு பயிரிடாத விவசாயிகளின் எண்ணிக்கை 24 ஆவதுடன், மிளகாய் பயிரிடாத விவசாயிகளின் எண்ணிக்கை 26 உம் ஆகும். மேற்குறித்த தகவல்களை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறித்து,

(i) மேலே எந்தவொரு பயிரையும் பயிரிடாத விவசாயிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) கிழங்கு மட்டும் பயிரிடும் விவசாயிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iii) மேற்குறித்த இரண்டு வகைகளையும் பயிரிடும் விவசாயிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

12. குறித்த ஒரு கிராமத்தில் 80 வீடுகளை எழுமாறாகத் தெரிவுசெய்து செய்யப்பட்ட ஒரு கணக்கெடுப்பில் பின்வரும் தகவல்கள் வெளிபடுத்தப்பட்டன.

- 5 வீடுகளுக்கு குழாய் நீரும் மின்சாரமும் இருக்கவில்லை.
- 30 வீடுகளுக்கு மின்சாரம் இருக்கவில்லை.
- குழாய் நீர் வசதி இருந்தும் மின்சாரம் இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கை மேற்குறித்த இரண்டு வசதிகளும் இருந்த வீடுகளின் எண்ணிக்கையிலும் 7 ஆல் கூடியதாகும்.

(i) மேற்குறித்த தகவல்களை ஒரு வென்வரிப்படத்தில் குறிக்க.

(ii) குழாய் நீரும் மின்சாரமும் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) மின்சாரம் இருந்தும் குழாய் நீர் வசதி இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iv) குழாய் நீர் இல்லாத வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(v) ஒரு வசதி மாத்திரம் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

கலைச் சொற்கள்

அ

அகக்கோணம்	අභ්‍යන්තර කෝණය	Interior angle
அகத்தெதிர்க் கோணம்	අභ්‍යාන්තර සම්මුඛ කෝණය	Interior opposite angle
அட்சரகணிதக் கோவை	වීජීය ප්‍රකාශන	Algebraic Expressions
அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	වීජීය භාග	Algebraic Fractions
அட்சரகணித உறுப்புகள்	වීජීය පද	Algebraic terms
அண்ணளவாக்கம்	සන්නිකර්ෂණය	Approximation

ஆ

ஆரை	අරය	Radius
ஆரைச்சிறைக் கோணம்	කේන්ද්‍ර කෝණය	Angle at the Centre
ஆரைச்சிறை	කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය	Sector

இ

இடைவெட்டு	ඡේදනය	Intersection
இருசம முக்கோணி	සමද්විපාද ත්‍රිකෝණය	Isosceles triangle
இருபடிச் சமன்பாடு	වර්ගජ සමීරණය	Quadratic equation
இணைகரம்	සමාන්තරාස්‍රය	Parallelogram

ஈ

ஈருறுப்புக் கோவை	ද්විපද ප්‍රකාශන	Binomial Expressions

உ

உச்சி	ශීර්ෂය	Vertex

எ

எதிர்க் கோணங்கள்	සම්මුඛ කෝණය	Opposite angle
எதிர்ப் பக்கங்கள்	සම්මුඛ පාදය	Opposite side
எளிய சமன்பாடுகள்	සරල සමීක්ෂණය	Simple equation

ஒ

ஒத்த கோணம்	අනුරූප කෝණය	Corresponding angle
ஒத்த மூலகங்கள்	අනුරූප අංග	Corresponding elements
ஒத்த பக்கம்	අනුරූප පාද	Corresponding sides
ஒருங்கிசைவு	අංගසම	Congruent

க

காரணி	සාධක	Factor
காலாண்டு	කාර්තුව	Quater year
குத்தெதிர்க் கோணம்	ප්‍රතිමුඛ කෝණ	Vertically opposite angle
கூட்டுத் தள உருவம்	සම්පාත	Compound figure

ச

சமவலுப்பின்னம்	තුල්‍ය භාග	Equivalent Fractions
சதவீதம்	ප්‍රතිශතය	Percentage
சுற்றளவு	පරිමිතිය	Perimeter
சுங்கவரி	තීරු බදු	Custom duty
செம்பக்கம்	කර්ණය	Hypotenuse
செங்குத்து	ලම්බය	Perpendicular
செங்குத்து இருசம கூறாக்கி	ලම්බ සමච්ඡේදකය	Perpendicular bisctor
செங்கோணம்	සෘජුකෝණය	Right angle
செங்கோண முக்கோணி	සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය	Right angle triangle

த

தசம எண்கள்	දශම සංඛ්‍යා	Decimal numbers
தள உருவம்	තල රූපය	Plane figure
தொகுதி	ලවය	Numerater
தேற்றம்	ප්‍රමේයය	Theorem

ந

நாற்பக்கல்	චතුරස්‍රය	Quadrilateral
நிறைவெண்கள்	පූර්ණ සංඛ්‍යා	Whole numbers
நிறைவர்க்கம்	පූර්ණ වර්ගය	Perfect square
நேர்மாறு விகித சமன்	ප්‍රතිලෝම සමානුපාතිකය	Indirect proportion

ப

பரப்பளவு	වර්ගඵලය	Area
புறக்கோணம்	බාහිර කෝණය	Exterior angle
பொதுப்பகுதி	පොදු හරය	Common Denominator
பொது மடங்குகளுட் சிறியது	කුඩා ම පොදු ගුණාකාරය	Least Common Mutiple

ம

முதலாம் அண்ணளவாக்கம்	පළමුවන සන්නිකර්ෂණය	First approximation
முறையான நிறுவல்	විධිමත් සාධනය	Formal proof

முக்கோணி	ත්‍රිකෝණය	Triangle
முக்கோணியொன்றின் உறுப்புக்கள்	ත්‍රිකෝණයක අංග	Elements of a Triangle
முழு எண்கள்	පූර්ණ සංඛ්‍යා	Whole number
மூலைவிட்டம்	විකර්ණය	Diagonal
மூலைமட்டம்	විහිත චතුරස්‍රය	Setsquare
மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவைகள்	ත්‍රිපද වර්ගජ ප්‍රකාශන	Trinomial Quadratic Expression

வ

வட்டி வீதம்	පොලී අනුපාතිකය	Interest rate
வட்ட வரைபுகள்	වට ප්‍රස්තාර	Pie charts
வர்க்கம்	වර්ගය	Square
வர்க்கித்தல்	වර්ගායිතය	Squaring
வர்க்க எண்கள்	වර්ග සංඛ්‍යා	Square numbers
வர்க்கமூலம்	වර්ගමූලය	Square root
வரைகோல்	කෝදුව	Ruler
வில்	චාපය	Arc
விரிவு	ප්‍රසාරණය	Expansion
வில்லின் நீளம்	චාප දිග	Length of arc
விகிதசமன்	සමානුපාතය	Proportion
விகிதம்	අනුපාතය	Ratio
விடை	විසඳුම	Solution

பாடத்திட்டம்

உள்ளடக்கம்	ஆசிரியர் வழிகாட்டியில் பாட இலக்கம்	பாடவேளைகள்
முதலாம் தவணை		
1. சுற்றளவு	1	4
2. வர்க்கமூலம்	2	4
3. பின்னங்கள்	3	4
4. ஈருறுப்புக் கோவைகள்	4	4
5. முக்கோணிகளின் ஒருங்கிசைவு	5	5
6. பரப்பளவு	6	4
7. இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள்	7	4
8. முக்கோணிகள் I	8	} 10
9. முக்கோணிகள் II	8	
10. நேர்மாறு விகிதசமன்	9	5
11. தரவுகளை வகைகுறித்தல்	10	3
12. அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியது	11	4
இரண்டாம் தவணை		
13. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	12	4
14. சதவீதம்	13	7
15. சமன்பாடுகள்	14	8
16. இணைகரங்கள் I	15	7
17. இணைகரங்கள் II	16	9
18. தொடைகள்	17	8
19. மடக்கை I	18	5
20. மடக்கை II	19	5
21. வரைபுகள்	20	9
22. வீதம்	21	5
23. சூத்திரங்கள்	22	3
மூன்றாம் தவணை		
24. அட்சரகணிதச் சமனிலிகள்	23	7
25. கூட்டல் விருத்தி	24	6
26. எண் பரம்பல்	25	10
27. வட்டத்தின் நாண்கள்	26	6
28. அமைப்புகள்	27	10
29. மேற்பரப்பளவும் கனவளவும்	28	9
30. நிகழ்தகவு	29	8
31. வட்டத்தின் கோணங்கள்	30	8
32. அளவிடைப் படம்	31	5